

**stichting
mathematisch
centrum**



AFDELING TOEGEPASTE WISKUNDE

TN 94/80

MAART

R. MONTIJN

EEN KARAKTERISTIEKE VERGELIJKING UIT DE
MATHEMATISCHE EPIDEMIOLOGIE

2e boerhaavestraat 49 amsterdam

Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O).

Een karakteristieke vergelijking uit de mathematische epidemiologie

door

Rob Montijn

SAMENVATTING

Een model wordt opgesteld voor een epidemie in een populatie waarbij een individu ziek kan worden en vervolgens tijdelijk immuun is. Onder de gemaakte aannamen wordt deze epidemie beschreven door een niet-lineaire integraalvergelijking. Bij het onderzoek naar periodieke oplossingen resulteert hieruit een karakteristieke vergelijking. Met numerieke en analytische methoden wordt getracht uitspraken te doen over de ligging van de wortels van deze karakteristieke vergelijking in het complexe vlak.

TREFWOORDEN: *niet-lineaire integraalvergelijking, karakteristieke vergelijking, numerieke integratie*

INHOUD

0) Inleiding	1
1) Overzicht resultaten	2
2) Het model	4
3) Aantal en reële nulpunten	7
4) Eenvoudige voorbeelden	10
5) Het reële probleem	11
6) Afleiding differentiaalvergelijkingen	18
7) Herformulering	22
8) Nulpunten op de imaginaire as	28
9) Het Nyquist-Kriterium	34
 Appendix A) Weerlegging van een vermoeden	 39
Appendix B) Enige functies met afgeleiden	41
 Literatuurlijst	 42

0. INLEIDING

a) Over de mathematische epidemiologie

Een van de onderwerpen uit de biomathematica die de laatste jaren in de belangstelling staan is de mathematische epidemiologie, d.i. het geven van een wiskundige beschrijving van het verloop van een epidemie in een populatie. Een model voor dit verschijnsel wordt opgesteld en men probeert de daaruit resulterende vergelijking(en) op te lossen. Enerzijds wil men dat het model een goede beschrijving van de "realiteit" geeft en anderzijds dat het zo "eenvoudig" is dat men de vergelijking(en) kan oplossen. Deze eisen werken elkaar tegen: alle behalve de eenvoudigste modellen laten dan ook geen analytische oplossing toe en men is aangewezen op numerieke berekening of men stelt m.b.t. het probleem relevante vragen en probeert die te beantwoorden. Enkele van deze vragen zijn: Gegeven dat in de beginsituatie een klein aantal zieken in de populatie aanwezig is, ontwikkelt zich dan een epidemie? Laat het model periodieke oplossingen toe? En in geval een ruimtelijke structuur van de populatie wordt beschouwd: laat het model lopende golfoplossingen toe?

b) Korte historie

Een van de klassieke artikelen van de mathematische epidemiologie is dat van KERMACK en McKENDRICK [1] dat in 1927 verscheen. Zij beschouwden een model waarin vatbaren ziek kunnen worden en vervolgens levenslang immuun. In 1956 publiceerde KENDALL [2] een artikel waarin hij een speciaal geval van het model van Kermack en McKendrick nader uitwerkte. Vooral sindsdien en met name de laatste tien jaar is er veel literatuur over dit onderwerp verschenen. Ik noem hier nog het boek van BAILEY [3], WALTMAN [4], HOPPENSTEADT [5] en het proefschrift van DIEKMANN [6]. O.a. LAUWERIER [7] kwam op het idee een model met beperkte immuniteitsduur te beschouwen. Modellen naar zijn voorbeeld worden o.a. beschouwd door BONDER [8] en Diekmann. Laatstgenoemde stelde het in §2 behandelde model op en vroeg of ik belangstelling had de karakteristieke vergelijking te onderzoeken die hieruit resulteerde bij het onderzoek naar periodieke oplossingen en dit is het onderwerp van deze scriptie.

c) Over de opzet

Het zal de lezer wellicht opvallen dat deze scriptie nogal veel numerieke gegevens (tabellen en plotjes) bevat. Dit is het resultaat van de opzet die gevolgd is n.l. om met behulp van numerieke methoden inzicht te krijgen en dan later te proberen de gevonden resultaten analytisch te bewijzen. Verschillende stellingen zijn inderdaad op die manier gevonden.

d) Erkentelijkheid

Dank gaat uit naar Odo Diekmann die een stimulerende invloed heeft gehad op mijn werk en die mij met advies en suggesties gesteund heeft, naar Nico Temme en H.A. Lauwerier die waardevolle opmerkingen hebben gemaakt, en verder naar Tom Koornwinder die kort voor de voltooiing van deze scriptie een tegenvoorbeeld vond voor een lang gekoesterd vermoeden.

1. DE VERGELIJKING EN DE BEHAALDE RESULTATEN

We zullen de volgende vergelijking onderzoeken:

$$(1.1) \quad f(s) = \int_0^1 e^{-s\tau} (A(\tau) + \alpha) d\tau - 1 = 0$$

met: $s \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $A(\tau) \in L^1[0,1]$, $A(\tau) \geq 0$, $\int_0^1 A(\tau) d\tau = 1$.

Waar deze vergelijking vandaan komt wordt beschreven in §2. We beperken ons hier tot een overzicht van de resultaten van analytisch en numeriek onderzoek van (1.1).

I Onderzoek naar reële wortels in §3 en §5 heeft opgeleverd:

- a) Zij $\alpha \geq 0$ dan heeft (1.1) precies één reële wortel x_0 ($x_0 \geq 0$) en alle andere wortels hebben een reëel deel kleiner dan x_0 . Dit is een resultaat uit de literatuur betreffende Lotka's vergelijking (zie §3).
- b) Zij $A(\tau) = 0$ voor $\frac{3}{4} < \tau \leq 1$ dan is er een $\bar{\alpha} < 0$ zodat, als $\bar{\alpha} < \alpha < 0$, (1.1) twee reële wortels heeft, als $\alpha = \bar{\alpha}$, (1.1) een dubbele reële wortel heeft en als $\alpha < \bar{\alpha}$ (1.1) geen reële wortels heeft. Als ze er zijn dan zijn de reële wortels negatief. Dit is niet meer waar als $\frac{3}{4}$ vervangen wordt door een willekeurig ander getal ε , $\frac{3}{4} < \varepsilon < 1$ (zie Appendix A). Het wordt echter nog wel bewezen voor een speciale klasse van functies

$$A(\tau), \text{ n.l. } A(\tau) = B(\beta, \gamma, \tau) = \begin{cases} \frac{1}{\gamma - \beta} & \beta \leq s \leq \gamma \\ 0 & \text{elders} \end{cases} \quad 0 \leq \beta < \gamma < 1.$$

- II Zij $A(\tau) = A(1-\tau)$ b.o. dan is er behalve $\alpha = 0$ geen enkele waarde van α waarvoor (1.1) een wortel op de imaginaire as heeft (zie §8).
- III Zij $A(\tau) = A(1-\tau)$ b.o. dan heeft (1.1) als $\alpha > 0$ precies één wortel in het rechterhalfvlak $\operatorname{Re}(s) \geq 0$ en als $\alpha < 0$ geen enkele wortel in het rechterhalfvlak $\operatorname{Re}(s) \geq 0$.
- IV $s = x+iy$ stellend en gebruik makend van de impliciete functiestelling en x en y als functies van α beschouwend, worden formules afgeleid voor $dx/d\alpha$ en $dy/d\alpha$ en eveneens voor dx/dq en dy/dq waarbij $q = 1/\alpha$ (zie §6 en §7).
- De rest van de resultaten is voornamelijk numeriek. Voor numerieke doeleinden hebben we ons beperkt tot functies $A(\tau)$ van het type $A(\tau) = B(\beta, \gamma, \tau)$ (zie onder Ib).
- V Uitgaande van de dubbele reële wortel $\alpha = \bar{\alpha}$ uit Ib werd het stelsel differentiaalvergelijkingen $dx/d\alpha$, $dy/d\alpha$ numeriek geïntegreerd. Het blijkt dat bij kleiner worden van α deze wortels zich naar de imaginaire as toe bewegen en voor bepaalde $B(\beta, \gamma, \tau)$ gaan zij door de imaginaire as heen (zie §6).
- VI Vanuit de punten $x=0$, $y=2\pi n$, $n = 1, 2, 3, 4, 5$ werd het stelsel dx/dq , dy/dq numeriek geïntegreerd en aldus werden plaatjes (zie fig. 7.1, 7.2, 7.3) verkregen van de banen van de wortels van (1.1) in het complexe vlak als α van $-\infty$ naar $+\infty$ loopt (zie §7).
- VII Met behulp van het principe van Nyquist werd numeriek aangetoond dat er bij gegeven $A(\tau) = B(\beta, \gamma, \tau)$ een $\alpha^* < 0$ is zodat als $\alpha^* < \alpha < 0$ alle nulpunten van (1.1) in het linkerhalfvlak liggen. Als $A(\tau) = A(1-\tau)$ en vermoedelijk ook als $A(\tau)$ monotoon niet-dalend is dan is $\alpha^* = -\infty$ (zie §9).

2. MODEL VAN EEN EPIDEMIE MET TIJDELIJKE IMMUNITEIT EN ZONDER RUIMTELIJKE AFHANKELIJKHEID

We maken de volgende aannamen:

- 1e Er is een niet-negatieve functie $\bar{A}(\tau)$ zodat een individu dat geïnfecteerd is op een tijdstip t_1 op het tijdstip t_2 een infectieve kracht $\bar{A}(t_2 - t_1)$ uitstraalt en er is een τ_1 zodat $\bar{A}(\tau) = 0$ voor $\tau \geq \tau_1$. Er is een τ_2 zodat een individu dat geïnfecteerd is op tijdstip t_1 weer vatbaar wordt op tijdstip $t = t_1 + \tau_2$ ($\tau_2 \geq \tau_1$). De functie $\bar{A}$ is onafhankelijk van plaatsvariabelen. $\bar{A}(\tau)$ zou er als volgt uit kunnen zien:

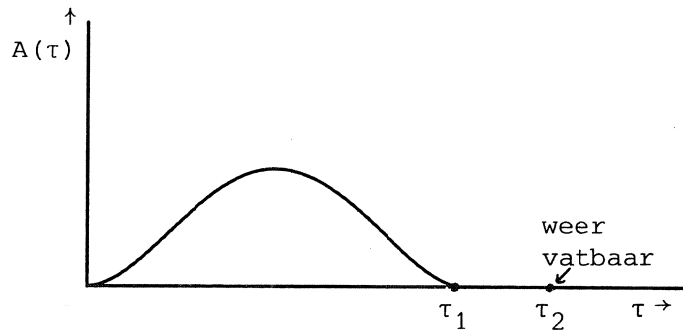


fig. 2.1

- 2e De populatie is demografisch gesloten d.w.z. dat er geen individuen uit de populatie verdwijnen of er binnenkomen ofwel dat ieder individu dat verdwijnt onmiddellijk wordt vervangen door een individu dat m.b.t. de ziekte in dezelfde toestand verkeert.

Enige opmerkingen over het model:

De functie $\bar{A}(\tau)$ zal karakteristiek zijn voor de ziekte. Het bestaan van deze functie impliceert dat het ziekteverloop voor ieder individu hetzelfde is, een duidelijk irreële aanname. Over een "grote" populatie met "veel" zieken zouden de individuele verschillen misschien wel uit kunnen middelen waardoor het model toch nog waarde heeft. De aanname dat er geen ruimtelijke afhankelijkheid is, is ook duidelijk irreëel gezien wat wij over het verspreiden van een besmettelijke ziekte weten (bacteriën of virussen). Een wiskundige behoeft zich echter niet onmiddellijk om dit soort zaken te bekommeren: de

resultaten van een model kunnen vergeleken worden met wat wordt waargenomen en op grond hiervan kan altijd nog besloten worden of een model toepasbaar is of niet.

Theoretisch experiment.

Na deze uitwijding beginnen we aan het afleiden van de formules. We definiëren de volgende grootheden:

- $S(t)$ het aantal van de vatbaren (voor de ziekte)
- $I(t)$ de dichtheid van de nieuwe zieken
- C het totale aantal individuen van de populatie.

We hebben de volgende twee integraalvergelijkingen:

$$(2.1) \quad \text{de dynamische vergelijking} \quad I(t) = S(t) \int_0^{\tau_2} I(t-\tau) \bar{A}(\tau) d\tau$$

$$(2.2) \quad \text{de behoudswet} \quad S(t) + \int_0^{\tau_2} I(t-\tau) d\tau = C.$$

We schalen de grootheden als volgt:

$$y(t) = \frac{\tau_2}{C} I(t\tau_2)$$

$$x(t) = \frac{1}{C} S(t\tau_2)$$

$$A(\tau) = \frac{\tau_2 \bar{A}(\tau\tau_2)}{\int_0^{\tau_2} \bar{A}(\tau) d\tau}$$

$$\gamma = C \int_0^{\tau_2} \bar{A}(\tau) d\tau$$

Dan gaat het stelsel (2.1) (2.2) over in

$$(2.3) \quad y(t) = x(t) \gamma \int_0^1 y(t-\tau) A(\tau) d\tau$$

$$(2.4) \quad x(t) + \int_0^1 y(t-\tau) d\tau = 1$$

met $\gamma > 0$ en $\int_0^1 A(\tau) d\tau = 1$.

Voor het onderzoek naar constante oplossingen van het stelsel (2.3) (2.4) substitueren we $x(t) = \bar{x}$, $y(t) = \bar{y}$. Dan volgt:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{y} = \bar{x}\bar{y}\gamma \\ \bar{x} + \bar{y} = 1 \end{array} \right\} \text{ zodat } \bar{x} = 1/\gamma \text{ en } \bar{y} = 1 - 1/\gamma \text{ of } \bar{x} = 1 \text{ en } \bar{y} = 0.$$

Voor het onderzoek naar het ontstaan van periodieke oplossingen lineari-
zeren we (2.3) (2.4) om $\bar{x} = 1/\gamma$, $\bar{y} = 1 - 1/\gamma$ (Hopfbifurcatie, zie MARS DEN &
McCRACKEN [9]):

Stel $x(t) = 1/\gamma + \xi(t)$, $y(t) = 1 - 1/\gamma + \eta(t)$. Invullen in (2.3) en (2.4) geeft:
(we verwaarlozen de hogere orde term)

$$(2.5) \quad \xi(t) + \int_0^1 \eta(t-\tau) d\tau = 1$$

$$(2.6) \quad (1-\gamma)\xi(t) + \eta(t) - \int_0^1 \eta(t-\tau)A(\tau) d\tau = 0.$$

Vervolgens stellen we $\xi(t) = C_1 e^{st}$ en $\eta(t) = C_2 e^{st}$. (2.5) en (2.6) gaat
dan over in:

$$(2.7) \quad C_1 + C_2 \int_0^1 e^{-s\tau} d\tau = 1$$

$$(2.8) \quad (1-\gamma)(C_1) + C_2 - C_2 \int_0^1 e^{-s\tau} A(\tau) d\tau = 0.$$

Dan heeft (2.7) (2.8) een oplossing als

$$D(s) = \begin{vmatrix} 1 & \int_0^1 e^{-s\tau} d\tau \\ 1-\gamma & 1 - \int_0^1 e^{-s\tau} A(\tau) d\tau \end{vmatrix} = 0.$$

Dit geeft de karakteristieke vergelijking:

$$(2.9) \quad \int_0^1 e^{-s\tau} A(\tau) d\tau + (1-\gamma) \int_0^1 e^{-s\tau} d\tau = 1.$$

We hadden reeds de voorwaarden: $\int_0^1 A(\tau) d\tau = 1$, $A(\tau) \geq 0$ en $\gamma > 0$.

Omdat we alleen geïnteresseerd zijn in niet-negatieve periodieke oplossingen
eisen we $1 - 1/\gamma > 0$ dus $\gamma > 1$. Verder: $\exists \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$ zodat $A(\tau) = 0$
voor $1 - \varepsilon < \tau \leq 1$.

Hiermee wordt de periode van immuniteit tot uiting gebracht.

Voor wiskundig onderzoek van vergelijking (2.9) zullen we niet al deze eisen handhaven maar het probleem onderzoeken zoals het reeds in §1 en ten overvloede aan het begin van §3 geformuleerd staat. Verder stellen we $1 - \gamma = \alpha$. Voor het model zijn dan vooral negatieve waarden van α interessant.

3. OVER HET AANTAL NULPUNTEN EN EEN UIT DE LITERATUUR BEKEND RESULTAAT

We schrijven de karakteristieke vergelijking (1.1) nogmaals op:

$$(3.1) \quad f(s) = \int_0^1 e^{-s\tau} (A(\tau) + \alpha) d\tau - 1 = 0$$

met

$$s \in \mathbb{C}, \alpha \in \mathbb{R}, A(\tau) \in L^1[0,1], \quad A(\tau) \geq 0, \quad \int_0^1 A(\tau) d\tau = 1.$$

Deze vergelijking lijkt veel op een vergelijking die in de literatuur (zie b.v. KEYFITZ [10], LOPEZ [11]) bekend staat als Lotka's vergelijking:

$\int_a^b e^{-s\tau} \phi(\tau) d\tau = 1$, $a, b \geq 0$, $b > a$, $\phi(\tau) \geq 0$, $s \in \mathbb{C}$, $\int_a^b \phi(\tau) d\tau > 0$.
Als α zo gekozen is dat $A(\tau) + \alpha \geq 0$ voor $\tau \in [0,1]$ en $\int_0^1 (A(\tau) + \alpha) d\tau > 0$ dan is $f(s) = 0$ inderdaad van dit type.

Eén van de van Lotka's vergelijking bekende eigenschappen formuleren we toegepast op $f(s) = 0$ in stelling 3.1.

Eerst merken we nog op dat $\overline{f(s)} = f(\bar{s})$ dus $f(s) = 0 \iff f(\bar{s}) = 0$. Dit betekent dat de wortels die niet reëel zijn voorkomen in complex geconjugeerde paren.

STELLING 3.1. Voor iedere α die voldoet aan $1 + \int_0^1 (A(\tau) + \alpha) d\tau > 0$, $2e$
 $A(\tau) + \alpha \geq 0$ voor $\tau \in [0,1]$ geldt: de vergelijking $f(s) = 0$ heeft precies één reële wortel x_0 en iedere andere wortel heeft reëel deel kleiner dan x_0 . Als $\alpha > 0$ dan is $x_0 > 0$, als $\alpha = 0$ dan is $x_0 = 0$ en als $\alpha < 0$ dan is $x_0 < 0$.

BEWIJS. Stel $s = x$ reëel. $f(x) = \int_0^1 e^{-x\tau} (A(\tau) + \alpha) d\tau - 1$. $f(x)$ is monotoon dalend immers $f'(x) = - \int_0^1 e^{-x\tau} \tau (A(\tau) + \alpha) d\tau$ en alle termen onder het integraalteken zijn niet-negatief en tezamen met de voorwaarde $\int_0^1 (A(\tau) + \alpha) d\tau > 0$ volgt hieruit $f'(x) < 0$. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ en $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -1$. $f(x)$ heeft dus precies één nulpunt x_0 . Zij nu $f(s) = 0$, $s = x + iy$, $y \neq 0$, dan geldt zeker $\operatorname{Re}\{f(s)\} = 0$ dus $\int_0^1 e^{-x\tau} \cos(y\tau) (A(\tau) + \alpha) d\tau - 1 = 0$. Omdat $\cos(y\tau) \leq 1$ en alle andere termen onder het integraalteken niet-negatief zijn en $\int_0^1 (A(\tau) + \alpha) d\tau > 0$ geldt $\int_0^1 e^{-x\tau} (A(\tau) + \alpha) d\tau - 1 > 0$ en wegens $f'(x) < 0$ volgt dan $x < x_0$. $f(0) = \alpha$ dus als $\alpha > 0$ dan $f(0) > 0 \Rightarrow x_0 > 0$, als $\alpha = 0$ dan $f(0) = 0 \Rightarrow x_0 = 0$ en als $\alpha < 0$ dan $f(0) < 0 \Rightarrow x_0 < 0$. $\square$

Als voor zekere $\bar{\alpha}$ voldaan is aan de voorwaarden van stelling 3.1. dan is er ook aan voldaan voor alle $\alpha > \bar{\alpha}$. Voor $\alpha \geq 0$ is er altijd aan de voorwaarden voldaan en bij speciale $A(\tau)$ kan er ook aan voldaan zijn voor negatieve waarden van α echter nooit voor $\alpha \leq -1$ want dan geldt $\int_0^1 (A(\tau) + \alpha) d\tau = 1 + \alpha \leq 0$.

OPMERKING. Omdat $A(\tau)$ alleen onder een integraalteken voorkomt kunnen we voor het probleem geen onderscheid maken tussen functies $A(\tau)$ die bijna overal aan elkaar gelijk zijn (d.w.z. slechts op een verzameling met Lebesgue-maat nul van elkaar verschillen). We kunnen dergelijke functies met elkaar identificeren en een equivalentieklasse van functies die b.o. aan elkaar gelijk zijn beschouwen als één functie.

STELLING 3.2. Behalve als $A(\tau) \equiv 1$ b.o. en $\alpha = -1$ heeft vergelijking (3.1) oneindig veel wortels.

BEWIJS. $f(s)$ is een gehele functie. Dit kan bewezen worden door aan te tonen dat $f(s)$ in een willekeurig punt differentieerbaar is maar we kunnen het ook op de volgende manier inzien: $f(s)$ is een Laplace-getransformeerde en er is een stelling die zegt dat een Laplace-getransformeerde een analytische functie is in het gebied rechts van de convergentie-abscis en de convergentie-abscis van $f(s)$ is $-\infty$ omdat slechts over een eindig interval geïntegreerd wordt.

Een gehele functie $g(z)$ heet van eindige orde als er een positief

getal A bestaat zodat als $|z| = r \rightarrow \infty$, $f(z) = O(e^{r^A})$. De benedengrens P van getallen A waarvoor dit waar is heet de orde van de functie (zie TITCHMARCH [12] ch.8.2). Het is zonder veel moeite na te gaan dat $f(s)$ van orde kleiner of gelijk één is. Stel nu dat $f(s)$ slechts eindig veel nulpunten heeft. Volgens Hadamard's factorisatie-theorema (zie TITCHMARCH [12] ch.8.24) kunnen we $f(s)$ dan schrijven als $f(s) = e^{as+b} \prod_{i=1}^n (1-s/s_i)$ waarbij s_i $i = 1, \dots, n$ de nulpunten van $f(s)$ zijn. Uit $f(s) = f(\bar{s})$ volgt dat a reëel is en dat e^b reëel is. We weten dat $\lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = -1$ en dat kan alleen als $a = 0$ en $n = 0$ en $e^b = -1$ maar dan is $f(s) \equiv -1$. $f(s)$ heeft dus oneindig veel nulpunten tenzij $f(s) \equiv -1$. Stel dit laatste is het geval. Uit $f(0) = -1$ volgt $\int_0^1 (A(\tau) + \alpha) d\tau - 1 = \alpha = -1 \Rightarrow \alpha = -1$. Dus $\int_0^1 e^{-s\tau} A(\tau) d\tau \equiv \int_0^1 e^{-s\tau} d\tau$. Wegens het uniekheids-theorema voor Laplace-getransformeerden geldt dan $A(s) \equiv 1$ b.o. $\square$

STELLING. Zij $N \in \mathbb{N}$ willekeurig en zij $0 < r < \pi$, r verder willekeurig. We brengen om de punten $2\pi ki$, $k = -N, -N+1, \dots, -1, 1, \dots, N-1, N$ cirkels r_k aan met straal r . Dan is er een $\bar{\alpha} > 0$ zodat als $|\alpha| > \bar{\alpha}$, $f(s)$ binnen elke cirkel r_k precies één nulpunt heeft.

BEWIJS. We delen $f(s)$ door α : $f(s)/\alpha = 1/\alpha (\int_0^1 e^{-s\tau} A(\tau) d\tau - 1) + \int_0^1 e^{-s\tau} d\tau$. We maken gebruik van Rouché's Theorema: Zij $f(z)$ en $g(z)$ analytisch in en op een gesloten contour c en zij $|g(z)| < |f(z)|$ op c dan hebben $f(z)$ en $f(z) + g(z)$ hetzelfde aantal nulpunten binnen c . De functie $\int_0^1 e^{-s\tau} d\tau$ heeft binnen elk cirkeltje r_k precies één nulpunt nl. $2k\pi i$. Zij nu

$$M = \max_{\substack{s \in r_k \\ k = -N, \dots, +N \\ k \neq 0}} \left| \int_0^1 e^{-s\tau} A(\tau) d\tau - 1 \right|$$

en zij verder

$$m = \max_{\substack{s \in r_k \\ k = -N, \dots, +N \\ k \neq 0}} \left| \int_0^1 e^{-s\tau} d\tau \right|$$

kies dan $\bar{\alpha} = \frac{M}{m}$. $\square$

4. EENVOUDIGE VOORBEELDEN

We laten de eis $A(\tau) \in L^1[0,1]$ even vallen en nemen

$$A(\tau) = a\delta(\tau) + (1-a)\delta(\tau-1), \quad 0 \leq a < 1$$

waarbij $\delta(\tau)$ de zogenaamde delta-functie is:

$$\delta(\tau) = 0 \text{ voor } \tau \neq 0, \quad \delta(\tau) = \infty \text{ voor } \tau = 0, \quad \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(\tau) d\tau = 1 \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Invullen in $f(s) = 0$ geeft:

$$a + (1-a)e^{-s} + \alpha \int_0^1 e^{-s\tau} d\tau - 1 = 0$$

$$\alpha \frac{1-e^{-s}}{s} = (1-a)(1-e^{-s}) = 0.$$

Deze vergelijking heeft de wortels $s = \frac{\alpha}{1-a}$ en $s = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Er is één reële wortel die als α van $+\infty$ naar $-\infty$ gaat over de reële as van $+\infty$ naar $-\infty$ gaat en aftelbaar oneindig veel nulpunten die op hun plaats blijven als α varieert. Vermoedelijk alleen bij deze keuze van $A(\tau)$ zijn alle wortels expliciet te bepalen. In het vervolg zullen we ons weer beperken tot echte functies $A(\tau)$.

Een ander eenvoudig voorbeeld is het volgende: Neem $A(\tau) \equiv 1$. Invullen in $f(s) = 0$ geeft

$$(1+\alpha) \frac{1-e^{-s}}{s} - 1 = 0.$$

Volgens stelling 3.1 is er voor $\alpha > -1$ precies één reële wortel en alle andere wortels hebben reëel deel kleiner dan deze wortel. Als α van $+\infty$ naar -1 gaat, gaat deze reële wortel van $+\infty$ naar $-\infty$. Alle wortels schuiven dan steeds verder het linkerhalfvlak in tot ze tenslotte als $\alpha = -1$ in het negatieve oneindige zijn verdwenen. Volgens stelling 9.1 liggen als $\alpha < 0$ alle nulpunten in het linkerhalfvlak en als $\alpha > 0$ ligt alleen de ene reële wortel in het rechterhalfvlak.

5. HET REËLE PROBLEEM $\int_0^1 e^{-x\tau} (A(\tau) + \alpha) d\tau - 1 = 0$ (5.1)

Voor $\alpha \geq 0$ is dit probleem al opgelost: er is precies één x_0 die voldoet en $x_0 > 0$ als $\alpha > 0$ en $x_0 = 0$ als $\alpha = 0$.

Voor $\alpha < 0$ moeten we het nog onderzoeken. Daartoe brengen we (5.1) in de volgende vorm:

$$(5.2) \quad \alpha = \frac{1 - \int_0^1 e^{-x\tau} A(\tau) d\tau}{\int_0^1 e^{-x\tau} d\tau} \stackrel{\text{def}}{=} g(x).$$

Voor $g(x)$ hebben we de volgende afschattingen:

$$\begin{aligned} x < 0: \quad 1 &< \int_0^1 e^{-x\tau} A(\tau) d\tau < e^{-x} \Rightarrow x < g(x) < 0 \\ x > 0: \quad e^{-x} &< \int_0^1 e^{-x\tau} A(\tau) d\tau < 1 \Rightarrow 0 < g(x) < x \end{aligned}$$

$g(x)$ verloopt dus geheel in het gearceerde gebied van fig. 5.1.

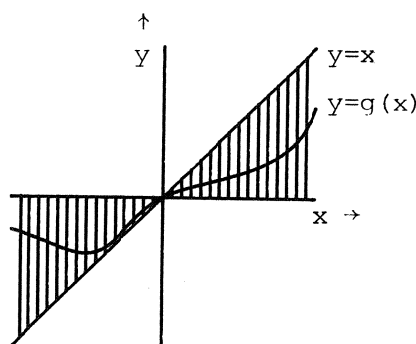


Fig. 5.1.

Als $\alpha < 0$ geldt dus voor iedere x die oplossing is van (5.1): $x < 0$. We kunnen ons dus verder tot het interval $(-\infty, 0)$ beperken.

Numeriek onderzoek van $g(x)$ voor verschillende $A(\tau)$ heeft geleid tot de volgende vermoedens: Er zijn twee mogelijkheden nl.

- (1) $g'(x)$ heeft precies één nulpunt in het interval $(-\infty, 0)$
- (2) $g'(x)$ heeft geen nulpunt in het interval $(-\infty, 0)$.

Als $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$ en dus zeker als $A(\tau) = 0$ voor $1 - \varepsilon < \tau \leq 1$, $0 < \varepsilon < 1$

dan geldt (1).

fig. 5.2 en fig. 5.3 tonen grafieken van $f(x)$ voor verschillende $A(\tau)$.

$$\text{fig. 5.2 } A(\tau) = \begin{cases} 8 & \text{voor } \beta \leq \tau \leq \beta + 0.125 \\ 0 & \text{elders} \end{cases} \quad \beta = 0(0.125)0.750$$

De curve zakt als β toeneemt

$$\text{fig. 5.3 } A(\tau) = \begin{cases} 1/1-\beta & \text{voor } \beta \leq \tau \leq 1 \\ 0 & \text{elders} \end{cases} \quad \beta = 0(0.125)0.875$$

De curve zakt weer als β toeneemt.

We proberen de vermoedens te bewijzen. Daartoe differentiëren we $g(x)$.

$$g'(x) = \frac{\int_0^1 e^{-x\tau} \tau A(\tau) d\tau \int_0^1 e^{-x\tau} d\tau + [1 - \int_0^1 e^{-x\tau} A(\tau) d\tau] \int_0^1 e^{-x\tau} \tau d\tau}{[\int_0^1 e^{-x\tau} d\tau]^2}$$

i.p.v. $g'(x)$ onderzoeken we

$$h(x) = \frac{-(\int_0^1 e^{-x\tau} d\tau)^2}{\int_0^1 e^{-x\tau} \tau d\tau} g'(x)$$

$h(x)$ heeft dezelfde nulpunten als $g'(x)$.

$h(x)$ schrijven we als volgt:

$$h(x) = \int_0^1 e^{-x\tau} A(\tau) \left[1 - \tau \frac{\int_0^1 e^{-xu} du}{\int_0^1 e^{-xu} u du} \right] d\tau - 1$$

$$h(0) = \int_0^1 A(\tau) [1 - 2\tau] d\tau - 1 = -2 \int_0^1 A(\tau) \tau d\tau < 0.$$

We definiëren de volgende klassen van functies $A(\tau)$ ($0 < \varepsilon < 1$): H_ε is de verzameling van alle functies $A(\tau)$ die voldoen aan $A(\tau) = 0$ voor $1 - \varepsilon < \tau < 1$ en $H_0 = \bigcup_{0 < \varepsilon < 1} H_\varepsilon$.

We leggen nu aan $A(\tau)$ de volgende beperking op: $A(\tau) \in H_0$. Onder deze voorwaarde geldt: $h(x) \rightarrow \infty$ voor $x \rightarrow -\infty$.

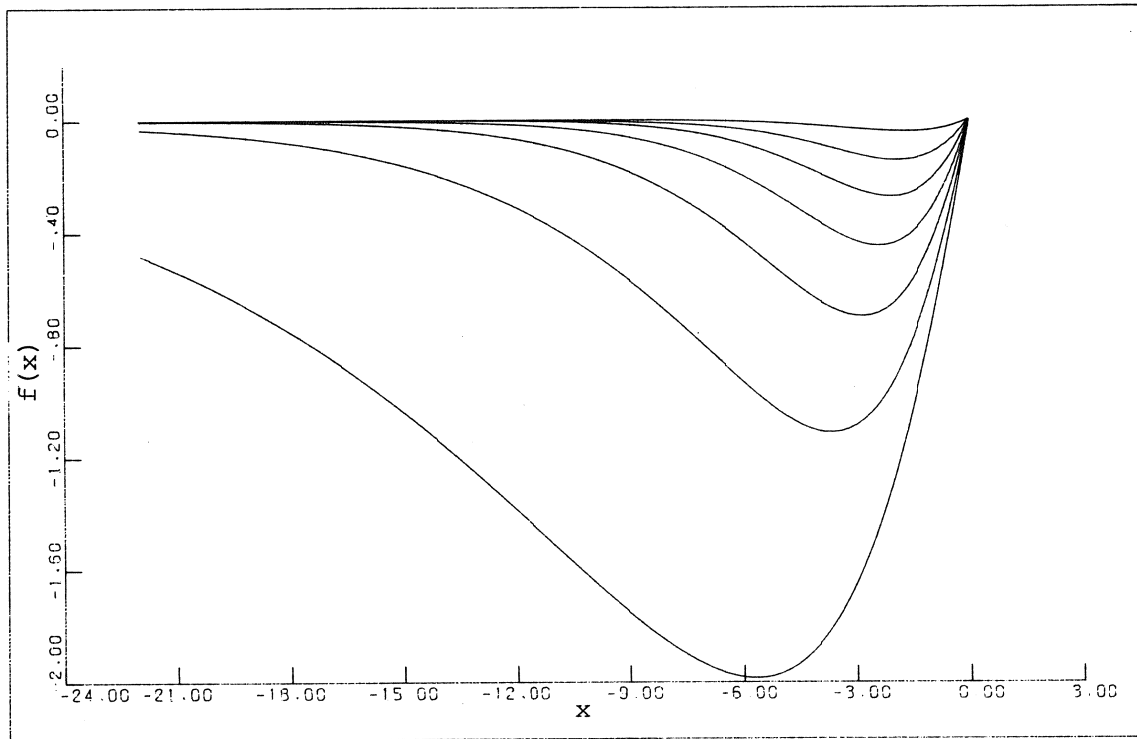


Fig. 5.2

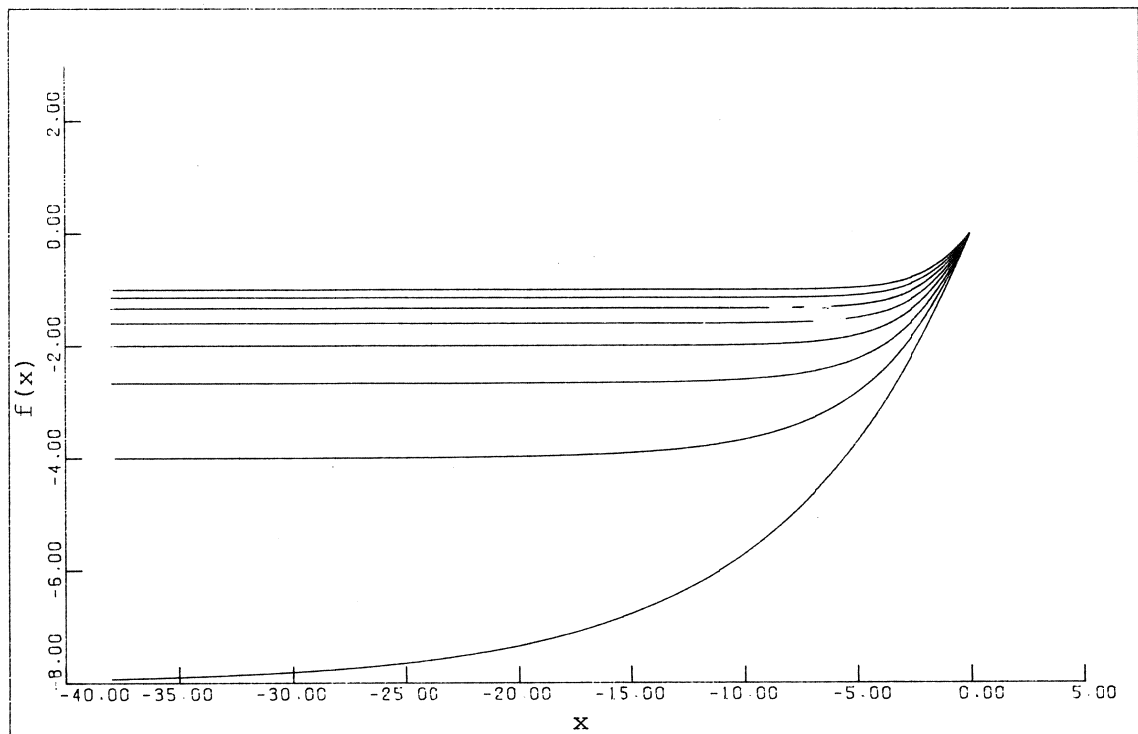


Fig. 5.3

BEWIJS. Definieer

$$k(x) = \frac{\int_0^1 e^{-xu} du}{\int_0^1 e^{-xu} u du}$$

dan: $k(0) = 1/\frac{1}{2} = 2$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} k(x) = 1$.

$$k'(x) = \frac{-[\int_0^1 e^{-xu} u du]^2 + \int_0^1 e^{-xu} u^2 du \int_0^1 e^{-xu} du}{(\int_0^1 e^{-xu} u du)^2} \geq 0$$

(Cauchy-Schwarz op de teller toegepast).

Kies nu ε zo dat $A(\tau) \in H_\varepsilon$. Dan is er een N_1 zodat $k(x) < 1 - \frac{1}{2}\varepsilon / 1 - \varepsilon$ voor $x < N_1$

$$\begin{aligned} x < N_1 &\Rightarrow 1 - \tau k(x) > 1 - (1 - \varepsilon) \cdot \frac{1 - \frac{1}{2}\varepsilon}{1 - \varepsilon} = \frac{1}{2}\varepsilon \\ x < N_1 &\Rightarrow h(x) > \frac{1}{2}\varepsilon \int_0^1 e^{-x\tau} A(\tau) d\tau - 1. \end{aligned}$$

Zij nu $M > 0$ willekeurig. Kies $N_2 < 0$ zodat $x < N_2 \Rightarrow \int_0^1 e^{-x\tau} A(\tau) d\tau > \frac{2(M+1)}{\varepsilon}$.

Zij nu $N = \min(N_1, N_2)$ dan geldt:

$$x < N \Rightarrow g(x) > \frac{1}{2}\varepsilon \frac{2(M+1)}{\varepsilon} - 1 = M. \quad \square$$

CONCLUSIE. Als $A(\tau) \in H_0$ dan heeft $h(x)$: (1) tenminste één nulpunt.
(2) een oneven aantal nulpunten.

Als we nu kunnen bewijzen dat $h'(x) < 0$ voor $A(\tau) \in H_0$ dan weten we dat $h(x)$ precies één nulpunt heeft. In het algemeen is dit echter niet waar. Wel als we aan $A(\tau)$ nog een extra eis opleggen.

STELLING 5.1. Als $A(\tau) \in H_{2/3}$ dan geldt: $h'(x) < 0$.

BEWIJS.

$$\begin{aligned} h'(x) = \int_0^1 A(\tau) &\left[-\tau e^{-x\tau} \left(1 - \tau \frac{\int_0^1 e^{-xu} du}{\int_0^1 e^{-xu} u du} \right) \right. \\ &\left. + e^{-x\tau} \tau \left(\frac{\int_0^1 e^{-xu} u du \int_0^1 e^{-xu} u^2 du - \left(\int_0^1 e^{-xu} u du \right)^2}{\left(\int_0^1 e^{-xu} u du \right)^2} \right) \right] d\tau = \end{aligned}$$

$$= \int_0^1 e^{-x\tau} A(\tau) \tau \frac{\int_0^1 e^{-x\tau} d\tau}{\int_0^1 e^{-x\tau} \tau d\tau} \left(\tau - \frac{\int_0^1 e^{-xu} u^2 du}{\int_0^1 e^{-xu} u du} \right) d\tau$$

definieer

$$l(x) := \frac{\int_0^1 e^{-xu} u^2 du}{\int_0^1 e^{-xu} u du}$$

$$\text{dan: } l(0) = 2/3 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} l(x) = 1$$

$$l'(x) = \frac{-\int_0^1 e^{-xu} u^3 du \int_0^1 e^{-xu} u du + \int_0^1 e^{-xu} u^2 du \int_0^1 e^{-xu} u^2 du}{\left(\int_0^1 e^{-xu} u du\right)^2} \leq 0$$

(Cauchy-Schwarz op de teller toegepast).

TOELICHTING: We definiëren $\langle f, g \rangle = \int_0^1 fg \phi du$, $\phi = ue^{-xu}$

Cauchy-Schwarz: $|\langle f, g \rangle|^2 \leq \|f\|^2 \|g\|^2$, $\|f\|^2 = \langle f, f \rangle$. Kies nu $f = u$, $g \equiv 1$.

$$l'(0) = \frac{-\frac{1}{4} \cdot -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = 4\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{8}\right) < 0$$

dus: $l(x) \geq 2/3$ en $l(x) = 2/3 \iff x = 0$.

Dus als $\tau \in [0, 2/3]$ dan geldt:

$$\tau - \frac{\int_0^1 e^{-xu} u^2 du}{\int_0^1 e^{-xu} u du} \leq 0$$

en het gelijktteken geldt alleen als $x = 0$ $\tau = 2/3$.

De rest van de termen onder het integraalteken zijn ≥ 0 : $\Rightarrow h'(x) < 0$. $\square$

Op de volgende manier kunnen we nog iets verder komen:

Definieer $i(x)$ als volgt:

$$i(x) = - \frac{\left(\int_0^1 e^{-xu} u du\right)^2}{\int_0^1 e^{-xu} u^2 du \cdot \int_0^1 e^{-xu} du} h'(x).$$

Stel $h(x)$ heeft meer dan één nulpunt. Dan heeft $h(x)$ ($A(\tau) \in H_0$) tenminste drie nulpunten. Dan heeft $h'(x)$ tenminste twee nulpunten, en dan heeft $i(x)$ tenminste twee nulpunten. Dan heeft $i'(x)$ tenminste één nulpunt.

Als we kunnen bewijzen dat $i'(x) < 0$ dan weten we dat $h(x)$ precies één nul-

punt heeft. Dit is waar voor een iets grotere klasse van functies $A(\tau)$ dan die van stelling 5.1.:

STELLING 5.2. Als $A(\tau) \in H_{3/4}$ dan geldt: $i'(x) < 0$.

BEWIJS.

$$i'(x) = \int_0^1 e^{-x\tau} A(\tau) \tau^2 \frac{\int_0^1 e^{-xu} u du}{\int_0^1 e^{-xu} u^2 du} \left(\tau - \frac{\int_0^1 e^{-xu} u^3 du}{\int_0^1 e^{-xu} u^2 du} \right) d\tau$$

$$x = 0 \Rightarrow \frac{\int_0^1 e^{-xu} u^3 du}{\int_0^1 e^{-xu} u^2 du} = 3/4$$

verder gaat het bewijs zoals dat van stelling 5.1. $\square$

We zouden graag bewijzen: $A(\tau) \in H_0 \Rightarrow h(x)$ heeft precies één nulpunt. Dit is niet gelukt. Wel werkt de onderstaande methode die in het verlengde van de stellingen 5.1 en 5.2 ligt in een speciaal geval nl.

$$A(\tau) = B(\beta, \gamma, \tau) \begin{cases} \frac{1}{\gamma - \beta} & \beta \leq \tau \leq \gamma \\ 0 & \text{elders} \end{cases}, \quad 0 \leq \beta < \gamma < 1.$$

We definiëren $h_n(x)$ als volgt:

$$h_n(x) = \int_0^1 e^{-x\tau} A(\tau) \tau^n \left[1 - \tau \frac{T_n(x)}{T_{n+1}(x)} \right] d\tau, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

waarbij $T_n(x) = \int_0^1 e^{-xu} u^n du$. Merk op: $h(x) = h_0(x) - 1$, $i(x) = h_1(x)$.

Evenals voor de functies $h(x)$ en $i(x)$ geldt: $A(\tau) \in H_0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} h_n(x) = +\infty$ en $A(\tau) \in H_{\frac{n+1}{n+2}} \Rightarrow h_n(x) > 0$, $\forall x \in (-\infty, 0)$. Opeenvolgende functies $h_n(x)$ zijn verbonden door de volgende relatie:

$$h_{n+1}(x) = - \frac{[T_{n+1}(x)]^2}{T_{n+2}(x) \cdot T_n(x)} h'_n(x).$$

Uit deze relatie blijkt: $h_{n+1}(x)$ heeft precies dezelfde nulpunten als $h'_n(x)$ verder hebben we $h_n(0) = \int_0^1 A(\tau) \tau^n \left(1 - \frac{n+2}{n+1} \tau \right) d\tau$.

STELLING. Stel $A(\tau) \in H_0$ dan geldt: de rij $\{h_n(0)\}_{n=1}^{\infty}$ heeft ten hoogste één tekenwisseling $\Rightarrow h(x)$ heeft precies één nulpunt.

Onder een tekenwisseling verstaan we dat een term positief (negatief) is en de eerstvolgende term die ongelijk nul is negatief (positief) is.

BEWIJS. Zij ε het grootste getal ($0 < \varepsilon < 1$) zodat $A(\tau) \in H_{\varepsilon}$. Zij k het kleinste natuurlijke getal zodat $\frac{k+1}{k+2} \geq \varepsilon$ dan geldt $h_n(x) > 0$ voor $n \geq k$. Als de rij $\{h_n(0)\}_{n=1}^{\infty}$ één tekenwisseling heeft is deze dus van negatief naar positief. Stel dit is het geval. Stel $h(x) = h_0(x) - 1$ heeft meer dan één dus tenminste drie nulpunten, dan heeft $h_1(x)$ er tenminste twee en wegens $\lim_{x \rightarrow -\infty} h_1(x) = +\infty$ en $h_1(0) < 0$ heeft $h_1(x)$ tenminste drie.

Zij l het grootste natuurlijke getal zodat $h_l(0) < 0$ dan zien we door steeds herhalen van de voorafgaande argumenten dat $h_l(x)$ minstens drie nulpunten heeft en dat voor $n \geq l+1$ $h_n(x)$ minstens twee nulpunten heeft, dus ook dat $h_k(x)$ twee nulpunten heeft. Tegenspraak.

Als $\{h_n(0)\}_{n=1}^{\infty}$ geen tekenwisseling heeft zien we op dezelfde manier dat $h_n(x) \forall n \in \mathbb{N}$ tenminste twee nulpunten heeft dus ook $h_k(x)$, wat weer een tegenspraak geeft. $\square$

Gebruik makend van dit resultaat bewijzen we de volgende stelling.

STELLING 5.3. Zij

$$A(\tau) = B(\beta, \gamma, \tau) = \begin{cases} \frac{1}{\gamma - \beta} & \beta \leq \tau \leq \gamma \\ 0 & \text{elders} \quad 0 \leq \beta < \gamma < 1 \end{cases}$$

dan heeft $h(x)$ precies één nulpunt.

BEWIJS. Beschouw de rij $\{h_n(0)\}_{n=1}^{\infty}$ $h_n(0) = \int_0^1 A(\tau) \tau^n d\tau - \frac{n+2}{n+1} \int_0^1 A(\tau) \tau^{n+1} d\tau = \frac{1}{\gamma - \beta} \frac{1}{n+1} (\gamma^{n+1} - \beta^{n+1}) - \frac{n+2}{n+1} \frac{1}{\gamma - \beta} \frac{1}{n+2} (\gamma^{n+2} - \beta^{n+2})$.

Aangezien we alleen in het tekenverloop geïnteresseerd zijn kunnen we net zo goed de rij $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ beschouwen waarbij

$$\mu_n = \frac{h_n(0)}{\int_0^1 A(\tau) \tau^n d\tau} \quad (n+1).$$

We hebben dan

$$\mu_n = \frac{\gamma^{n+1} - \beta^{n+1}}{\gamma^{n+2} - \beta^{n+2}} - 1 \stackrel{\gamma=\beta/\gamma}{=} \frac{1}{\gamma} \frac{1 - \gamma^{n+1}}{1 - \gamma^{n+2}} - 1$$

$$\frac{d\mu_n}{dn} = \frac{1}{\gamma} \frac{-\gamma^{n+1} \ln(\gamma) (1 - \gamma^{n+2}) - (1 - \gamma^{n+1}) (-\gamma^{n+1} \ln(\gamma))}{(1 - \gamma^{n+2})^2} =$$

$$\frac{1}{\gamma} \frac{\gamma^{n+2} \ln(\gamma) - \gamma^{n+1} \ln(\gamma)}{(1 - \gamma^{n+2})^2} = \frac{1}{\gamma} \frac{(\gamma - 1) \gamma^n \ln(\gamma)}{(1 - \gamma^{n+2})^2} > 0 \text{ wegens } \begin{cases} \gamma^n > 0 \\ \ln(\gamma) < 0 \\ \gamma - 1 < 0 \end{cases}$$

De rij $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ is dus monotoon stijgend zodat de rij $\{h_n(0)\}_{n=1}^{\infty}$ slechts één tekenwisseling kan hebben. $\square$

Nadat deze paragraaf geschreven was is het vermoeden, $A(\tau) \in H_0 \Rightarrow h(x)$ heeft precies één nulpunt, door een tegenvoorbeeld van Tom Koornwinder weerlegd. Dit staat beschreven in appendix A.

6. HET OMZETTEN VAN $\int_0^1 e^{-s\tau} (A(\tau) + \alpha) d\tau - 1 = 0$ IN EEN STELSEL DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN

Omdat het erg moeilijk is analytisch nog veel meer te zeggen gaan we nu verder numeriek werken. Voor numerieke doeleinden zullen we ons beperken tot blokfuncties

$$A(\tau) = B(\beta, \gamma, \tau) = \begin{cases} \frac{1}{\gamma - \beta} & \beta \leq \tau \leq \gamma \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$$

met $0 \leq \beta < \gamma < 1$. Eén van de eerste vragen die zich leende voor een numerieke benadering was de volgende: Uit stelling 5.3 weten we dat er dan een $\bar{\alpha}$ is zodat als $\bar{\alpha} < \alpha < 0$, $f(s)$ twee reële nulpunten heeft, als $\alpha = \bar{\alpha}$, $f(s)$ een dubbel reëel nulpunt heeft en als $\alpha < \bar{\alpha}$, $f(s)$ geen reële nulpunten heeft. Laat nu α van 0^- naar $-\infty$ gaan dan zullen de twee reële nulpunten zich over de reële as naar elkaar toebeewegen, op elkaar botsen en vervolgens van de reële as af het complexe vlak in gaan. De vraag was nu of deze nulpunten

zich naar de imaginaire as toe zouden bewegen en of zij eventueel over de imaginaire as heen zouden gaan.

Om een nulpunt bij variatie van α numeriek te kunnen volgen zetten we de vergelijking $\int_0^1 e^{-s\tau} (A(\tau) + \alpha) d\tau - 1 = 0$ om in een stelsel differentiaal vergelijkingen. Hierbij is stilzwijgend gebruik gemaakt van de impliciete functiestelling (zie syllabus Analyse II [12] §10).

Stel $s = x + iy$ en splits in reëel en imaginair deel, dan volgt:

$$(6.1) \quad \int_0^1 e^{-x\tau} \cos(y\tau) (A(\tau) + \alpha) d\tau - 1 = 0$$

$$(6.2) \quad \int_0^1 e^{-x\tau} \sin(y\tau) (A(\tau) + \alpha) d\tau = 0.$$

Beschouw x en y als functies van α en differentieer naar α .

Dan volgt:

$$(6.3) \quad \int_0^1 e^{-x\tau} (-\tau) \cos(y\tau) (A(\tau) + \alpha) d\tau \frac{dx}{d\alpha} + \int_0^1 e^{-x\tau} (-\tau) \sin(y\tau) (A(\tau) + \alpha) d\tau \frac{dy}{d\alpha} + \int_0^1 e^{-x\tau} \cos(y\tau) d\tau = 0$$

$$(6.4) \quad \int_0^1 e^{-x\tau} (-\tau) \sin(y\tau) (A(\tau) + \alpha) d\tau \frac{dx}{d\alpha} + \int_0^1 e^{-x\tau} (+\tau) \cos(y\tau) (A(\tau) + \alpha) d\tau \frac{dy}{d\alpha} + \int_0^1 e^{-x\tau} \sin(y\tau) d\tau = 0.$$

Stel:

$$\begin{aligned} A &:= A(x, y, \alpha) := \int_0^1 e^{-x\tau} \tau \cos(y\tau) (A(\tau) + \alpha) d\tau \\ B &:= B(x, y, \alpha) := \int_0^1 e^{-x\tau} \tau \sin(y\tau) (A(\tau) + \alpha) d\tau \\ CC &:= CC(x, y) := \int_0^1 e^{-x\tau} \cos(y\tau) d\tau \\ SS &:= SS(x, y) := \int_0^1 e^{-x\tau} \sin(y\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Dan kunnen we het stelsel (6.3), (6.4) als volgt in matrixnotatie schrijven:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & -A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dx}{d\alpha} \\ \frac{dy}{d\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} CC \\ SS \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & -A \end{pmatrix} = \frac{1}{A^2+B^2} \begin{pmatrix} A & B \\ B & -A \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{dx}{d\alpha} \\ \frac{dy}{d\alpha} \end{pmatrix} = \frac{1}{A^2+B^2} \begin{pmatrix} A & B \\ B & -A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} CC \\ SS \end{pmatrix}$$

$$(6.5) \quad \frac{dx}{d\alpha} = \frac{1}{A^2+B^2} (A \cdot CC + B \cdot SS)$$

$$(6.6) \quad \frac{dy}{d\alpha} = \frac{1}{A^2+B^2} (B \cdot CC - A \cdot SS).$$

We pakken het probleem numeriek als volgt aan: we berekenen na het kiezen van $A(\tau)$ eerst $\bar{\alpha}$ met bijbehorende $\bar{x}$. Deze vinden we door eliminatie van α uit het stelsel:

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-x\tau} A(\tau) d\tau + \alpha \int_0^1 e^{-x\tau} d\tau &= 1 \\ \int_0^1 e^{-x\tau} \tau A(\tau) d\tau + \alpha \int_0^1 e^{-x\tau} \tau d\tau &= 0 \end{aligned}$$

en dan verder met een nulpuntsprocedure b.v. ZEROIN toegepast op een geschikt gekozen interval voor x b.v. $(\frac{1}{\gamma-\beta}, 0.1)$ wat de waarde $\bar{x}$ oplevert waarna $\bar{\alpha}$ gevonden kan worden door invullen van $\bar{x}$ in één van de twee bovenstaande vergelijkingen.

Omdat in het punt $x = \bar{x}$, $y = 0$, $\frac{dy}{d\alpha} = \infty$ kan vanuit dit punt niet zonder meer geïntegreerd worden. Daarom beginnen we de integratie in een punt (α, x, y) dat vlak bij $(\bar{\alpha}, \bar{x}, 0)$ ligt. Zo'n punt vinden we door gebruik te maken van een kwadratische benadering in een omgeving van $(\bar{\alpha}, \bar{x}, 0)$: Stel

$$\begin{aligned} x &= (x - \bar{x}) + \bar{x} = x^* + \bar{x} \\ \alpha &= (\alpha - \bar{\alpha}) + \bar{\alpha} = \alpha^* + \bar{\alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^1 e^{-x^* \tau} (A(\tau) + \alpha) d\tau = \int_0^1 e^{-x^* \tau} e^{-\bar{x} \tau} (A(\tau) + \bar{\alpha}) d\tau + \\
&+ \int_0^1 e^{-x^* \tau} e^{-\bar{x} \tau} \alpha^* d\tau - 1 = \int_0^1 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-x^*)^i \tau^i}{i!} e^{-\bar{x} \tau} (A(\tau) + \bar{\alpha}) d\tau + \\
&+ \int_0^1 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-x^*)^i \tau^i}{i!} e^{-\bar{x} \tau} \alpha^* d\tau - 1 = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-x^*)^i}{i!} \int_0^1 e^{-\bar{x} \tau} \tau^i (A(\tau) + \bar{\alpha}) d\tau + \\
&+ \alpha^* \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-x^*)^i}{i!} \int_0^1 e^{-\bar{x} \tau} \tau^i d\tau - 1 = \\
&= \frac{(x^*)^2}{2!} \int_0^1 e^{-\bar{x} \tau} \tau^2 (A(\tau) + \alpha) d\tau + \alpha^* \int_0^1 e^{-\bar{x} \tau} d\tau - \alpha^* x^* \int_0^1 e^{-\bar{x} \tau} \tau d\tau + \\
&+ \frac{\alpha^* x^{*2}}{2!} \int_0^1 e^{-\bar{x} \tau} \tau^2 d\tau + (x^*)^3 \dots
\end{aligned}$$

Verwaarlozen van 3e en hogere machten van x^* geeft dus:

$$(x^*)^2 \frac{1}{2} \left[\int_0^1 e^{-\bar{x} \tau} \tau^2 (A(\tau) + \alpha) d\tau + \alpha^* \int_0^1 e^{-\bar{x} \tau} \tau^2 d\tau \right] - x^* \alpha^* \int_0^1 e^{-\bar{x} \tau} \tau d\tau + \alpha^* \int_0^1 e^{-\bar{x} \tau} d\tau = 0$$

Noem:

$$\begin{aligned}
A_0 &:= \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-\bar{x} \tau} \tau^2 (A(\tau) + \bar{\alpha}) d\tau & B_1 &= \int_0^1 e^{-\bar{x} \tau} d\tau \\
B_2 &:= \int_0^1 \tau e^{-\tau \bar{x}} d\tau & B_3 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \tau^2 e^{-\tau \bar{x}} d\tau.
\end{aligned}$$

Dan hebben we:

$$\begin{aligned}
(x^*)^2 (A_0 + \alpha^* B_3) - x^* \alpha^* B_2 + \alpha^* B_1 &= 0 & |x^*| &\ll 1 \\
x_{12}^* &= \frac{\alpha^* B_2 \pm \sqrt{(\alpha^*)^2 B_2^2 - 4\alpha^* (A_0 + \alpha^* B_3) B_1}}{2(A_0 + \alpha^* B_3)}.
\end{aligned}$$

Numeriek geeft dit het volgende recept:

Kies α^* zeer klein en negatief bv. -10^{-10} . Evalueer $\text{Re}(x_1^*)$ en $\text{Im}(x_1^*)$.

Neem $\alpha = \bar{\alpha} + \alpha^*$, $x = \bar{x} + \text{Re}(x_1^*)$, $y = \text{Im}(x_1^*)$ en vul deze waarden in in:

$$\int_0^1 e^{-x\tau} (A(\tau) + \alpha) \cos(y\tau) d\tau - 1$$

en in

$$\int_0^1 e^{-x\tau} (A(\tau) + \alpha) \sin(y\tau) d\tau.$$

Evalueer deze functies en kijk of ze dicht genoeg bij 0 liggen. Is dit het geval dan zijn we klaar. Zo niet dan proberen we het opnieuw met een andere waarde van α^* bv. -10^{-12} . Na op deze manier geschikte startwaarden gevonden te hebben kunnen we het stelsel (6.5), (6.6) numeriek integreren met een procedure b.v. DIFSYS. Dit geeft het volgende beeld:

fig. 5.1. ontstaat als

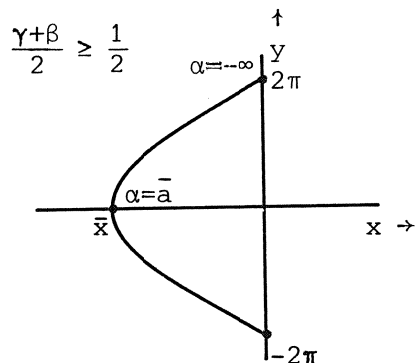
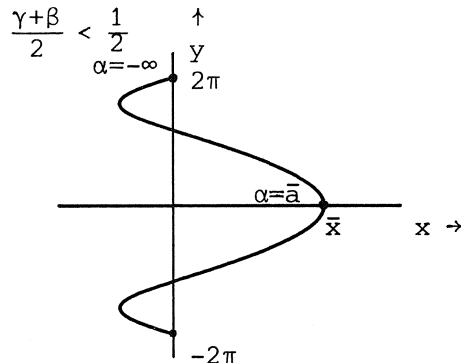


fig. 5.2. ontstaat als



7. HERFORMULERING MET $q = 1/\alpha$

Om de ligging van de nulpunten van $f(s) = \int_0^1 e^{-s\tau} (A(\tau) + \alpha) d\tau - 1$ te onderzoeken voor α zeer klein of zeer groot voeren we de parameter $q = 1/\alpha$ in.

$$f(s) = \int_0^1 e^{-s\tau} A(\tau) d\tau + \frac{1}{q} \int_0^1 e^{-s\tau} d\tau - 1$$

vermenigvuldigen met q :

$$(7.1) \quad k(s) := qf(s) = q \left(\int_0^1 e^{-s\tau} A(\tau) d\tau - 1 \right) + \int_0^1 e^{-s\tau} d\tau.$$

Als $q = 0$ zijn de nulpunten van $k(s)$ die van $\int_0^1 e^{-s\tau} d\tau = \frac{1-e^{-s}}{s}$ en dat zijn de punten $z = 2\pi ni$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ en dit zijn enkelvoudige nulpunten.

Met de impliciete functiestelling kan bewezen worden dat er voor ieder punt $2\pi ni$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ getallen $\sigma, \rho > 0$ bestaan zodat als $|q| < \sigma$ er precies één punt z is met $|z - 2\pi ni| < \rho$ zodat $k(s) = 0$.

Als in §6 kunnen we weer formules afleiden voor de afgeleiden dx/dq en dy/dq . Dit geeft

$$(7.2) \quad \frac{dx}{dq} = \frac{AI + BJ}{A^2 + B^2}$$

$$(7.3) \quad \frac{dy}{dq} = \frac{BI - AJ}{A^2 + B^2}$$

waarbij

$$A = A(x, y, q) = q \int_0^1 e^{-x\tau} \tau A(\tau) \cos(y\tau) d\tau + \int_0^1 e^{-x\tau} \tau \cos(y\tau) d\tau$$

$$B = B(x, y, q) = q \int_0^1 e^{-x\tau} \tau A(\tau) \sin(y\tau) d\tau + \int_0^1 e^{-x\tau} \tau \sin(y\tau) d\tau$$

$$I = I(x, y) = \int_0^1 e^{-x\tau} A(\tau) \cos(y\tau) d\tau - 1$$

$$J = J(x, y) = \int_0^1 e^{-x\tau} A(\tau) \sin(y\tau) d\tau.$$

En in de punten $2\pi ni$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ geldt:

$$(7.4) \quad \frac{dx}{dq} = -2\pi n \int_0^1 A(\tau) \sin(2\pi n\tau) d\tau$$

$$(7.5) \quad \frac{dy}{dq} = -2\pi n \left[\int_0^1 A(\tau) \cos(2\pi n\tau) d\tau - 1 \right].$$

En voor de tweede afgeleiden in deze punten:

$$(7.6) \quad \frac{d^2 x}{dq^2} = \left(\frac{dx}{dq} \right)^2 - \frac{4}{2\pi n} \left(\frac{dx}{dq} \right) \left(\frac{dy}{dq} \right) - \left(\frac{dy}{dq} \right)^2 + 4\pi n D \left(\frac{dx}{dq} \right) + 4\pi n C \left(\frac{dy}{dq} \right)$$

$$(7.7) \quad \frac{d^2 y}{dq^2} = \frac{2}{2\pi n} \left(\frac{dx}{dq} \right)^2 - 2 \left(\frac{dx}{dq} \right) \left(\frac{dy}{dq} \right) - \frac{2}{2\pi n} \left(\frac{dy}{dq} \right)^2 + 4\pi n C \left(\frac{dx}{dq} \right) + 4\pi n D \left(\frac{dy}{dq} \right)$$

$$C = \int_0^1 A(\tau) \tau \cos(2\pi n \tau) d\tau$$

$$D = \int_0^1 A(\tau) \tau \sin(2\pi n \tau) d\tau$$

dx/dq en dy/dq als in (7.4) en (7.5).

Het is van belang te weten of als $\alpha \rightarrow -\infty$ een nulpunt zich vanuit het rechterhalfvlak of vanuit het linkerhalfvlak naar een punt $2\pi ni$ beweegt.

Formule (7.4) kan hierover uitsluitsel geven nl.:

als $(dx/dq)_{x=0, y=2\pi ni} > 0$ dan komt het nulpunt vanuit het linkerhalfvlak naar $2\pi ni$.

als $(dx/dq)_{x=0, y=2\pi ni} < 0$ dan komt het nulpunt vanuit het rechterhalfvlak naar $2\pi ni$.

De opgave om wat meer inzicht te krijgen in hoe de nulpunten van $f(s)$ zich in het complexe vlak bewegen als α continu varieert kan numeriek op de volgende wijze worden aangepakt:

Kies een functie $A(\tau)$. We nemen weer een functie van het type

$A(\tau) = B(\beta, \gamma, \tau)$, nemen de punten $x = 0, y = 2\pi n, n = 1, 2, 3, 4, 5$ als startpunten voor integratie en integreren het stelsel (7.2), (7.3) numeriek vanuit deze punten zowel in positieve als in negatieve q -richting tot $|q|$ voldoende groot, in de praktijk ± 2500 behalve de negatieve tak vanuit $y = 2\pi, x = 0$, die precies tot hij de reële as bereikt. Dit is uitgevoerd voor 3 verschillende functies $A(\tau)$ en de figuren 7.1, 7.2 en 7.3 geven de resultaten.

TOELICHTING. Ingetekend zijn de lijnen $x = 0$, en $y = 2\pi n, n = 1, 2, 3, 4, 5$. De overige curven zijn de banen van de nulpunten. Pijltjes geven de bewegingsrichting aan als q toeneemt. Sterretjes geven de punten aan waar twee curven op elkaar aansluiten en komen overeen met $q = -\infty$ voor de ene en $q = +\infty$ voor de andere. Dit zijn de nulpunten van $f(s)$ met $\alpha = 0$.

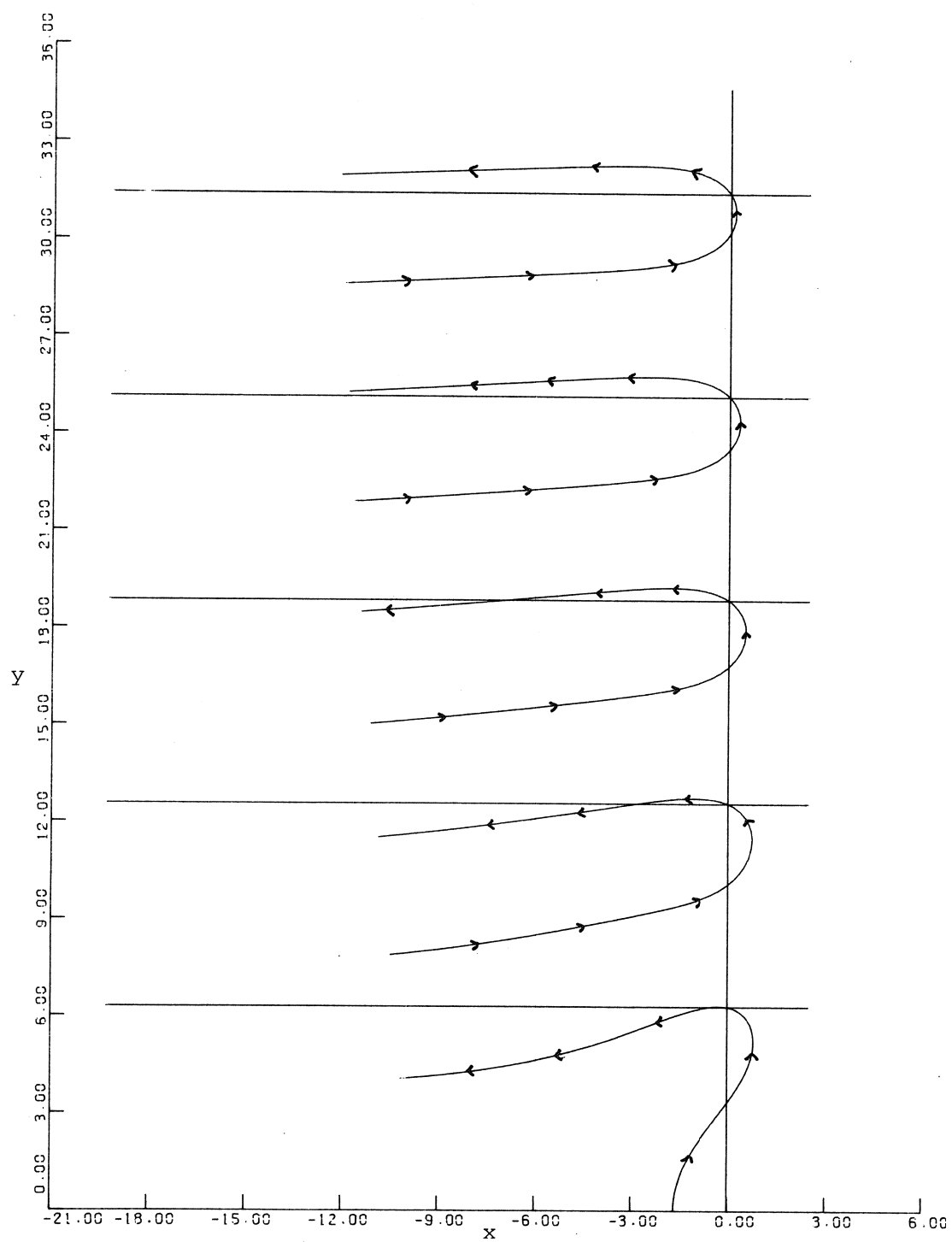


Fig. 7.1

 $\beta = 0 \quad \gamma = .1$

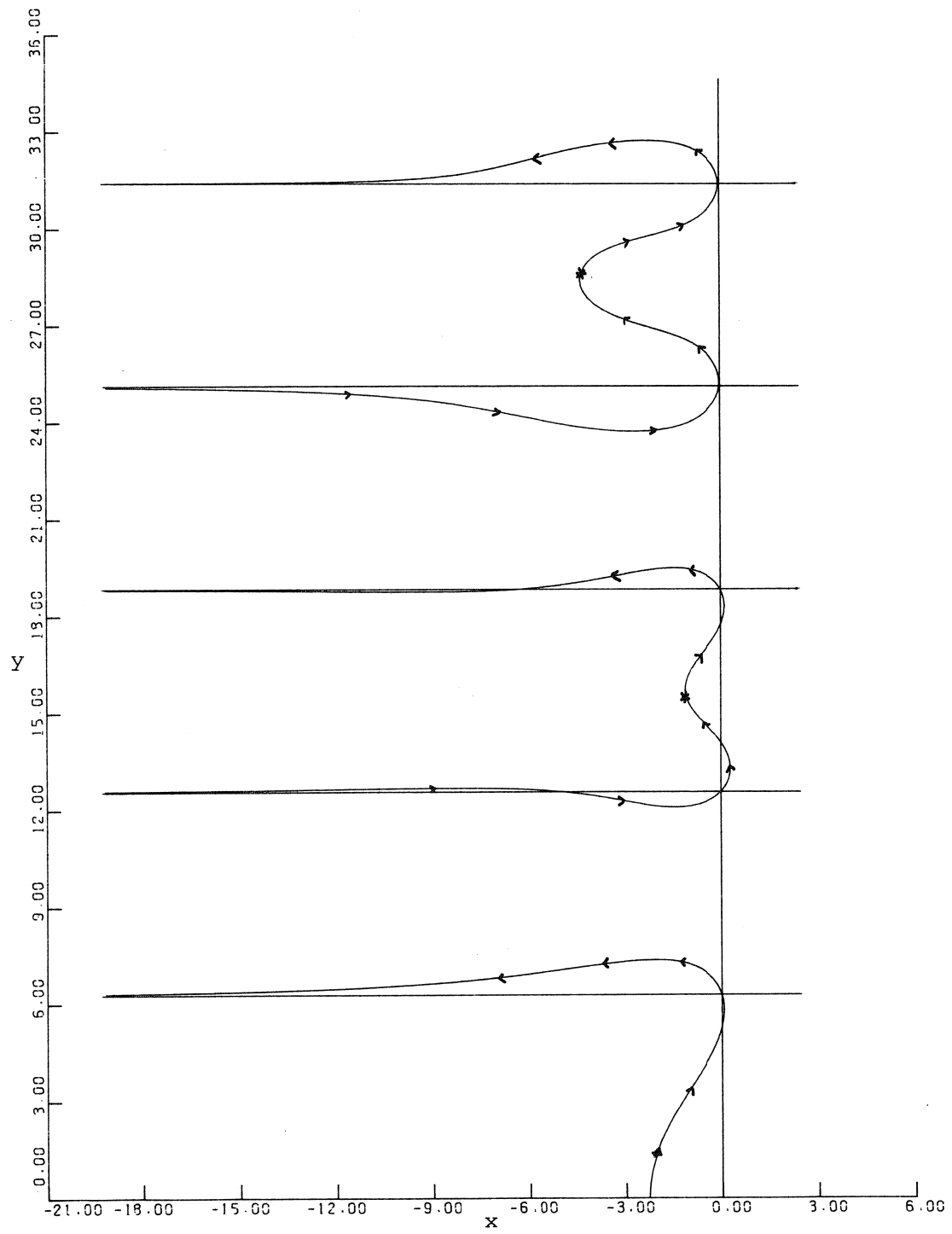


Fig. 7.2

 $\beta = 0.3 \quad \gamma = 0.5$

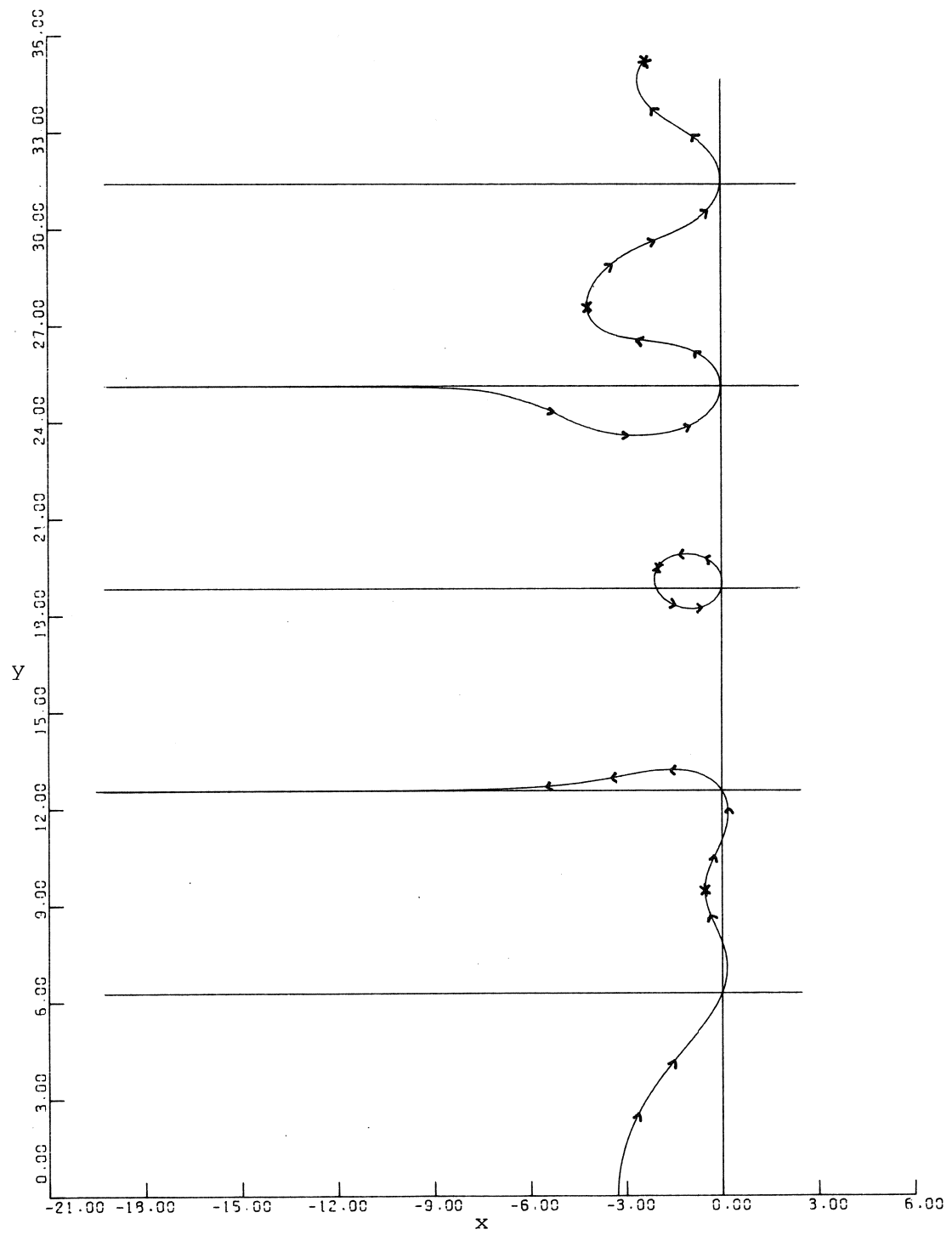


Fig. 7.3

$$\beta = 0.5 \quad \gamma = 0.75$$

8. HET ONDERZOEK NAAR NULPUNTEN OP DE IMAGINAIRE AS

Beschouw de vergelijking $\int_0^1 e^{-s\tau} (A(\tau) + \alpha) d\tau - 1 = 0$. Stel $s = iy$ en splits in reëel en imaginair deel. Dit geeft de volgende twee vergelijkingen.

$$(8.1) \quad \int_0^1 A(\tau) \cos(y\tau) d\tau + \alpha \int_0^1 \cos(y\tau) d\tau = 1$$

$$(8.2) \quad \int_0^1 A(\tau) \sin(y\tau) d\tau + \alpha \int_0^1 \sin(y\tau) d\tau = 0$$

uit 8.2:

$$\alpha = - \frac{\int_0^1 A(\tau) \sin(y\tau) d\tau}{\int_0^1 \sin(y\tau) d\tau}.$$

Substitutie in 7.1:

$$(8.3) \quad \frac{\int_0^1 A(\tau) \cos(y\tau) d\tau \int_0^1 \sin(y\tau) d\tau - \int_0^1 A(\tau) \sin(y\tau) d\tau \int_0^1 \cos(y\tau) d\tau}{\int_0^1 \sin(y\tau) d\tau} = 1$$

STELLING 8.1. Als $A(\tau) = A(1-\tau)$ b.o. dan is er behalve $(0,0)$ geen enkel paar (α, y) dat oplossing is van het stelsel vergelijkingen (8.1), (8.2).

BEWIJS.

$$\begin{aligned} & \int_0^1 A(\tau) \cos(y\tau) d\tau \int_0^1 \sin(y\tau) d\tau - \int_0^1 A(\tau) \sin(y\tau) d\tau \int_0^1 \cos(y\tau) d\tau = \\ & \int_0^1 A(\tau) \cos(y\tau) d\tau \int_0^1 \sin(yu) du - \int_0^1 A(\tau) \sin(y\tau) d\tau \int_0^1 \cos(yu) du = \\ & \int_0^1 A(\tau) [\cos(y\tau) \sin(yu) - \sin(y\tau) \cos(yu)] du d\tau = \\ & \int_0^1 \int_0^1 A(\tau) \sin(y(u-\tau)) du d\tau = \int_0^1 A(\tau) \left[\frac{-\cos(y(u-\tau))}{y} \right]_0^1 d\tau = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 A(\tau) \frac{\cos(y\tau) - \cos(y(1-\tau))}{y} d\tau &= \int_0^1 A(\tau) \frac{\cos(y\tau)}{y} d\tau - \\
&\quad - \int_0^1 A(\tau) \frac{\cos(y(1-\tau))}{y} d\tau = \\
\int_0^1 A(\tau) \frac{\cos(y\tau)}{y} d\tau - \int_0^1 A(1-\tau) \frac{\cos(y\tau)}{y} d\tau &= \int_0^1 [A(\tau) - A(1-\tau)] \frac{\cos(y\tau)}{y} d\tau = 0
\end{aligned}$$

(8.3) heeft dus geen oplossing behalve misschien als $\int_0^1 \sin(y\tau) d\tau = 0$.

Dit onderzoeken we apart: $\int_0^1 \sin(y\tau) d\tau = 0 \Rightarrow y = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Stel $n = 0$ uit vgl. (8.1) volgt $\alpha = 0$.

Stel $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, (8.1) levert $\int_0^1 A(\tau) \cos(2\pi n\tau) d\tau = 1$.

Maar $\int_0^1 A(\tau) \cos(2\pi n\tau) d\tau < 1$ dus dat kan niet. $\square$

Als $A(\tau)$ gegeven is en $A(\tau) \neq A(1-\tau)$ kunnen we een aantal paren (α, y) numeriek uitrekenen uit vgl. (8.3) of uit de vgl.

$$\frac{\int_0^1 [A(\tau) - A(1-\tau)] \cos(y\tau) d\tau}{1 - \cos(y)} = 1$$

d.m.v. de procedure ZERIONRAT.

Dit is uitgevoerd voor een aantal functies $A(\tau)$ van het type $A(\tau) = B(\beta, \gamma, \tau)$.

De tabellen 8.1, 8.2, 8.3 en 8.4 geven de eerste 20 paren (α, y) $y > 0$ die oplossing zijn van (8.3) gerangschikt naar opklimmende grootte van y .

tabel 8.1 $\beta = 0, \gamma = 0.1$

tabel 8.2 $\beta = 0.9, \gamma = 1$

tabel 8.3 $\beta = 0.3, \gamma = 0.5$

tabel 8.4 $\beta = 0.5, \gamma = 0.75$.

Tevens geven deze tabellen de afgeleiden $dx/d\alpha$ en $dy/d\alpha$.

Uit het numerieke onderzoek dat zich uitstrekt over nog veel meer waarden van β en γ komen de volgende vermoedens naar voren:

Zij $A(\tau)$ van het bovenstaande type en zij (α, y) oplossing van het stelsel (8.1), (8.2) dan geldt: $((\alpha, y) \neq (0, 0))$

1e $dy/d\alpha < 0$ als $y > 0$ en $dy/d\alpha > 0$ als $y < 0$

2e $\alpha < 0 \Rightarrow dx/d\alpha < 0$ en $\alpha > 0 \Rightarrow dx/d\alpha > 0$

- 3e $\beta = 0 \Rightarrow \alpha < 0$
- 4e $\gamma = 1 \Rightarrow \alpha > 0$
- 5e $\beta \neq 0, \gamma \neq 1, \beta \neq 1-\gamma \Rightarrow \exists(\alpha, \gamma)$ met $\alpha < 0$ en $\exists(\alpha, \gamma)$ met $\alpha > 0$
- 6e $\beta \neq 1-\gamma \Rightarrow$ er zijn aftelbaar oneindig veel paren (α, γ)
- 7e $G = \{(\alpha, \gamma) \mid \alpha > 0\}: G \neq \emptyset \Rightarrow \exists(\alpha, \gamma) \in G$ noem deze $(\bar{\alpha}, \bar{\gamma})$ zodat
 $(\alpha, \gamma) \in G \Rightarrow \alpha \geq \bar{\alpha}$ en er geldt: $\frac{\beta+\gamma}{2} < \frac{1}{2} \Rightarrow 4\pi < \bar{\gamma} < 6\pi$
 $\frac{\beta+\gamma}{2} > \frac{1}{2} \Rightarrow 2\pi < \bar{\gamma} < 4\pi$
- 8e $H = \{(\alpha, \gamma) \mid \alpha < 0\}: H \neq \emptyset \Rightarrow \exists(\alpha, \gamma) \in G$ noem deze $(\bar{\alpha}, \bar{\gamma})$ zodat
 $(\alpha, \gamma) \in H \Rightarrow \alpha \leq \bar{\alpha}$ en er geldt: $\frac{\beta+\gamma}{2} < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < \bar{\gamma} < 2\pi$
 $\frac{\beta+\gamma}{2} > \frac{1}{2} \Rightarrow 2\pi < \bar{\gamma} < 4\pi$

tabel 8.1

 $\beta = + 0.00$ $\alpha = + 0.10$

γ	α	$dx/d\alpha$	$dy/d\alpha$
+3.3658(+0)	-2.8412(-1)	-2.57(+0)	-3.57(+0)
+1.0095(+1)	-2.6224(+0)	-5.05(-1)	-3.96(-1)
+1.6816(+1)	-7.6832(+0)	-1.54(-1)	-1.38(-1)
+2.3525(+1)	-1.6439(+1)	-5.42(-2)	-6.39(-2)
+3.0212(+1)	-3.1081(+1)	-1.83(-2)	-3.02(-2)
+3.6868(+1)	-5.6945(+1)	-5.24(-3)	-1.29(-2)
+4.3479(+1)	-1.0763(+2)	-1.06(-3)	-4.37(-3)
+5.0027(+1)	-2.5248(+2)	-1.07(-4)	-9.33(-4)
+5.6486(+1)	-1.0015(+3)	-1.90(-6)	-6.22(-5)
+6.9055(+1)	-1.0668(+3)	-1.67(-6)	-5.55(-5)
+7.5194(+1)	-3.2515(+2)	-6.48(-5)	-6.20(-4)
+8.1329(+1)	-2.0801(+2)	-2.96(-4)	-1.64(-3)
+8.7532(+1)	-1.9433(+2)	-4.65(-4)	-2.13(-3)
+9.3826(+1)	-2.2820(+2)	-3.74(-4)	-1.78(-3)
+1.0018(+2)	-3.1512(+2)	-1.79(-4)	-1.06(-3)
+1.0658(+2)	-5.1247(+2)	-4.95(-5)	-4.40(-4)
+1.1298(+2)	-1.0729(+3)	-5.99(-6)	-1.06(-4)
+1.1934(+2)	-4.0695(+3)	-1.15(-7)	-7.56(-6)
+1.3191(+2)	-4.2002(+3)	-1.08(-7)	-7.14(-6)
+1.3812(+2)	-1.2186(+3)	-4.64(-6)	-8.65(-5)

tabel 8.2

$$\beta = +0.90$$

$$\gamma = +1.00$$

y	α	$dx/d\alpha$	$dy/d\alpha$
+6.6106(+0)	+3.7227(-1)	+5.06(-2)	-1.10(-2)
+1.3201(+1)	+1.5881(+0)	+4.49(-2)	-2.03(-2)
+1.9746(+1)	+3.9963(+0)	+3.65(-2)	-2.66(-2)
+2.6211(+1)	+8.3941(+0)	+2.65(-2)	-2.87(-2)
+3.2546(+1)	+1.6567(+1)	+1.62(-2)	-2.58(-2)
+3.8697(+1)	+3.2872(+1)	+7.45(-3)	-1.79(-2)
+4.4665(+1)	+7.0226(+1)	+1.96(-3)	-7.92(-3)
+5.0583(+1)	+1.8358(+2)	+1.83(-4)	-1.65(-3)
+5.6622(+1)	+8.4867(+2)	+2.64(-6)	-8.63(-5)
+6.9166(+1)	+1.2228(+3)	+1.27(-6)	-4.21(-5)
+7.5563(+1)	+3.9393(+2)	+4.32(-5)	-4.11(-4)
+8.1971(+1)	+2.4137(+2)	+2.04(-4)	-1.12(-3)
+8.8349(+1)	+2.0314(+2)	+3.75(-4)	-1.70(-3)
+9.4665(+1)	+2.1413(+2)	+3.71(-4)	-1.74(-3)
+1.0090(+2)	+2.7495(+2)	+2.13(-4)	-1.25(-3)
+1.0707(+2)	+4.3646(+2)	+6.52(-5)	-5.79(-4)
+1.1322(+2)	+9.3465(+2)	+7.81(-6)	-1.38(-4)
+1.1941(+2)	+3.7617(+3)	+1.34(-7)	-8.84(-6)
+1.3197(+2)	+4.5109(+3)	+9.38(-8)	-6.19(-6)
+1.3832(+2)	+1.3567(+2)	+3.72(-6)	-6.92(-5)

tabel 8.3

$$\beta = +0.30$$

$$\gamma = +0.50$$

y	α	$dx/d\alpha$	$dy/d\alpha$
+5.2801(+0)	-9.3420(+0)	-2.08(-2)	-8.35(-2)
+1.4092(+1)	+6.2183(+0)	+8.48(-2)	-1.19(-1)
+1.7702(+1)	-1.1908(+1)	-2.72(-2)	-6.16(-2)
+2.5386(+1)	+1.1784(+2)	+2.45(-4)	-2.12(-3)
+3.7891(+1)	+1.7131(+2)	+1.16(-4)	-1.10(-3)
+4.3575(+1)	-1.1382(+2)	-6.30(-4)	-3.35(-3)
+5.0616(+1)	+1.5207(+2)	+3.75(-4)	-2.22(-3)
+5.6421(+1)	-4.0639(+2)	-2.05(-5)	-3.08(-4)
+6.9017(+1)	-7.5595(+2)	-5.98(-6)	-1.28(-4)
+7.5641(+1)	+2.9794(+2)	+9.96(-5)	-8.01(-4)
+8.1455(+1)	-3.4711(+2)	-7.23(-5)	-6.35(-4)
+8.8041(+1)	+1.2066(+3)	+2.36(-6)	-6.35(-5)
+1.0060(+2)	+1.3677(+3)	+1.84(-6)	-5.11(-5)
+1.0664(+2)	-6.5188(+2)	-2.08(-5)	-2.54(-4)
+1.1325(+2)	+7.3373(+2)	+1.66(-5)	-2.13(-4)
+1.1932(+2)	-1.9455(+3)	-9.08(-7)	-3.01(-5)
+1.3189(+2)	-2.6447(+3)	-4.92(-7)	-1.94(-5)
+1.3836(+2)	+1.0256(+3)	+8.54(-6)	-1.27(-4)
+1.4438(+2)	-1.1184(+3)	-7.14(-6)	-1.12(-4)
+1.5084(+2)	+3.4382(+3)	+2.92(-7)	-1.31(-5)

tabel 8.4

$$\beta = +0.50$$

$$\gamma = +0.75$$

y	α	$dx/d\alpha$	$dy/d\alpha$
+7.8450(+0)	+6.5849(+0)	+6.32(-2)	-1.75(-1)
+1.1017(+1)	-4.5523(+0)	-5.64(-2)	-1.36(-1)
+1.9228(+1)	+3.9561(+1)	+1.38(-3)	-8.87(-3)
+3.1686(+1)	+1.3129(+2)	+2.28(-4)	-2.02(-3)
+3.7267(+1)	-8.4034(+1)	-9.58(-4)	-4.66(-3)
+4.4155(+1)	+2.3075(+2)	+7.43(-5)	-7.43(-4)
+5.6695(+1)	+4.1389(+2)	+2.32(-5)	-3.51(-4)
+6.2575(+1)	-2.4197(+2)	-1.28(-4)	-1.02(-3)
+6.9227(+1)	+5.7979(+2)	+1.18(-5)	-1.92(-4)
+8.1781(+1)	+8.5443(+2)	+5.46(-6)	-1.17(-4)
+8.7782(+1)	-4.7885(+2)	-3.38(-5)	-3.74(-4)
+9.4330(+1)	+1.0567(+3)	+3.38(-6)	-7.62(-5)
+1.0689(+2)	+1.4528(+3)	+1.89(-6)	-5.24(-5)
+1.1295(+2)	-7.9468(+2)	-1.24(-5)	-1.76(-4)
+1.1944(+2)	+1.7515(+3)	+1.30(-6)	-3.75(-5)
+1.3200(+2)	+2.2092(+3)	+8.18(-7)	-2.78(-5)
+1.3811(+2)	-1.1894(+3)	-5.58(-6)	-9.67(-5)
+1.4456(+2)	+2.5743(+3)	+6.03(-7)	-2.11(-5)
+1.5713(+2)	+3.1235(+3)	+4.09(-7)	-1.64(-5)
+1.6326(+2)	-1.6632(+3)	-2.86(-6)	-5.86(-5)

9. TOEPASSING VAN HET NYQUIST-KRITERIUM

Het Nyquist-kriterium kan als volgt worden samengevat: Zij $f(s)$ een Laplace-getransformeerde. We stellen $s = iy$ en laten y van $-\infty$ naar $+\infty$ lopen en bepalen de index van de kromme $f(iy)$ ten opzichte van het punt 0. Deze index is gelijk aan het aantal nulpunten minus het aantal polen van $f(s)$ in het rechterhalfvlak $\operatorname{Re}(s) > 0$. Als $f(s)$ geen polen heeft dan is deze index dus gelijk aan het aantal nulpunten van $f(s)$ in het rechterhalfvlak. Het bewijs is gebaseerd op het argumentenprincipe (zie b.v. TAKAHASHI [13]).

Met behulp van dit Nyquist-kriterium kunnen we dus als $A(\tau)$ en α gegeven zijn numeriek bepalen hoeveel nulpunten van $f(s) = \int_0^1 e^{-s\tau} (A(\tau) + \alpha) d\tau$ in het rechterhalfvlak liggen. Het is met name interessant te weten wanneer alle nulpunten in het linkerhalfvlak liggen.

Numerieke analyse van de Nyquist-spiraal waarbij $A(\tau) = B(\beta, \gamma, \tau)$ heeft de volgende resultaten opgeleverd. $\exists \alpha^*, \alpha^* < 0$ zodat als $\alpha \in (\alpha^*, 0)$ alle nulpunten van $f(s)$ in het linkerhalfvlak liggen. Als $\beta = 1 - \gamma$ of als $\gamma = 1$ dan geldt $\alpha^* = -\infty$. Zoniet dan is α^* gelijk aan de in §8 vermoeden 8e (blz. 30) gedefinieerde $\bar{\alpha}$. Als $\alpha \in \mathbb{R} \setminus (\alpha^*, 0)$ dan heeft $f(s)$ ten minste één nulpunt in het halfvlak $\operatorname{Re}(s) \geq 0$.

De figuren 9.1 t/m 9.4 tonen een stukje Nyquist-spiraal ($0 \leq y \leq 8\pi$) voor $A(\tau) = B(0.3, 0.5, \tau)$ voor 4 waarden van α n.l.

fig. 9.1 $\alpha = -5.000$

fig. 9.2 $\alpha = -9.342 = \bar{\alpha}$ (uit tabel 8.3)

fig. 9.3 $\alpha = -10.000$

fig. 9.4 $\alpha = -11.908$ (uit tabel 8.3)

STELLING 9.1. Als $A(\tau) = A(1-\tau)$ b.o. dan heeft $f(s)$: als $\alpha > 0$ precies één nulpunt in het rechterhalfvlak $\operatorname{Re}(s) > 0$ en als $\alpha < 0$ geen nulpunt in het rechterhalfvlak $\operatorname{Re}(s) \geq 0$.

BEWIJS. Stel $s = iy$ en splits in reëel en imaginair deel:

$$(9.1) \quad \operatorname{Re} f(iy) = \int_0^1 A(\tau) \cos(y\tau) d\tau + \alpha \int_0^1 \cos(y\tau) d\tau - 1$$

$$(9.2) \quad \operatorname{Im} f(iy) = \int_0^1 A(\tau) \sin(y\tau) d\tau - \alpha \int_0^1 \sin(y\tau) d\tau$$

Toepassing van de limietstelling van Riemann-Lebesgue geeft

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \operatorname{Re} f(iy) = -1 \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \operatorname{Im} f(iy) = 0.$$

En we hebben $\operatorname{Re} f(0) = \alpha$, $\operatorname{Im} f(0) = 0$.

Als y monotoon van 0 naar $+\infty$ gaat beschrijft $f(iy)$ een curve in het complexe vlak die van α naar -1 gaat. In het algemeen zal deze curve de imaginaire as een aantal keren snijden en wel een even aantal keren als $\alpha < 0$ en een oneven aantal keren als $\alpha > 0$. Zij nu α willekeurig $\alpha \neq 0$, α vast. Stel ia is een snijpunt van de curve met de imaginaire as en $\bar{y}$ de daarbij behorende waarde van y . Dan geldt $\operatorname{Re} f(i\bar{y}) = 0$, $\operatorname{Im} f(i\bar{y}) = a$.

Uit $\operatorname{Re} f(i\bar{y}) = 0$ volgt

$$\alpha \int_0^1 \cos(\bar{y}\tau) d\tau = 1 - \int_0^1 A(\tau) \cos(\bar{y}\tau) d\tau > 0 \quad (\bar{y} \neq 0)$$

dus:

$$\begin{aligned} \alpha > 0 &\Rightarrow \int_0^1 \cos(\bar{y}\tau) d\tau > 0 \\ \alpha < 0 &\Rightarrow \int_0^1 \cos(\bar{y}\tau) d\tau < 0 \end{aligned}$$

vervolgens elimineren we α uit $\operatorname{Re} f(iy) = 0$, $\operatorname{Im} f(i\bar{y}) = 0$.

Volgens het bewijs van stelling 8.1 geeft dit:

$$-a \frac{\int_0^1 \cos(\bar{y}\tau) d\tau}{\int_0^1 \sin(\bar{y}\tau) d\tau} = 1 \quad \bar{y} \geq 0, \bar{y} \neq 2\pi n, n \in \mathbb{N} \cup 0 \text{ (dit laatste geeft een tegenspraak in } \operatorname{Re} f(iy) = 0)$$

$$\begin{aligned} \text{dus } \int_0^1 \sin(\bar{y}\tau) d\tau > 0 \text{ dus: } \alpha > 0 &\Rightarrow a < 0 \\ \alpha < 0 &\Rightarrow a > 0. \end{aligned}$$

Dat de curve $f(iy)$ niet door de oorsprong gaat ($\alpha \neq 0$) vormt de inhoud van stelling 8.1. Conclusie: ($0 \leq y < \infty$). Als $\alpha > 0$ snijdt de curve van $f(iy)$ alleen de negatieve y -as. Als $\alpha < 0$ snijdt de curve van $f(iy)$ (als hij hem snijdt) alleen de positieve y -as.

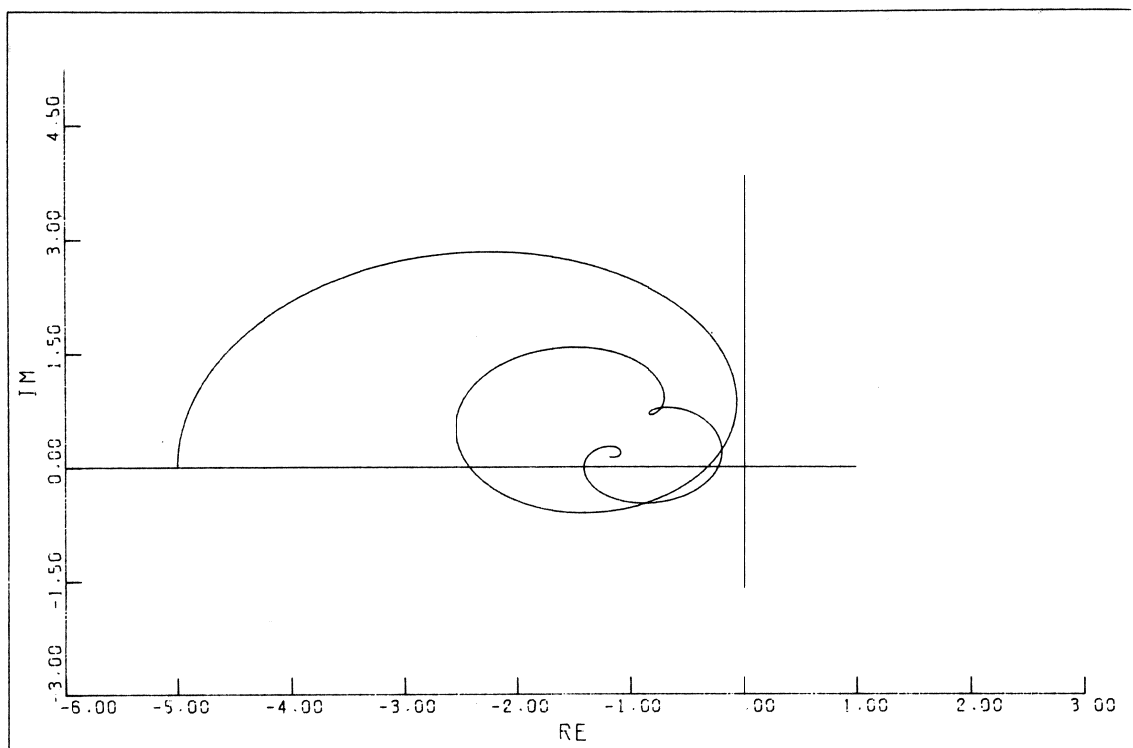


Fig. 9.1

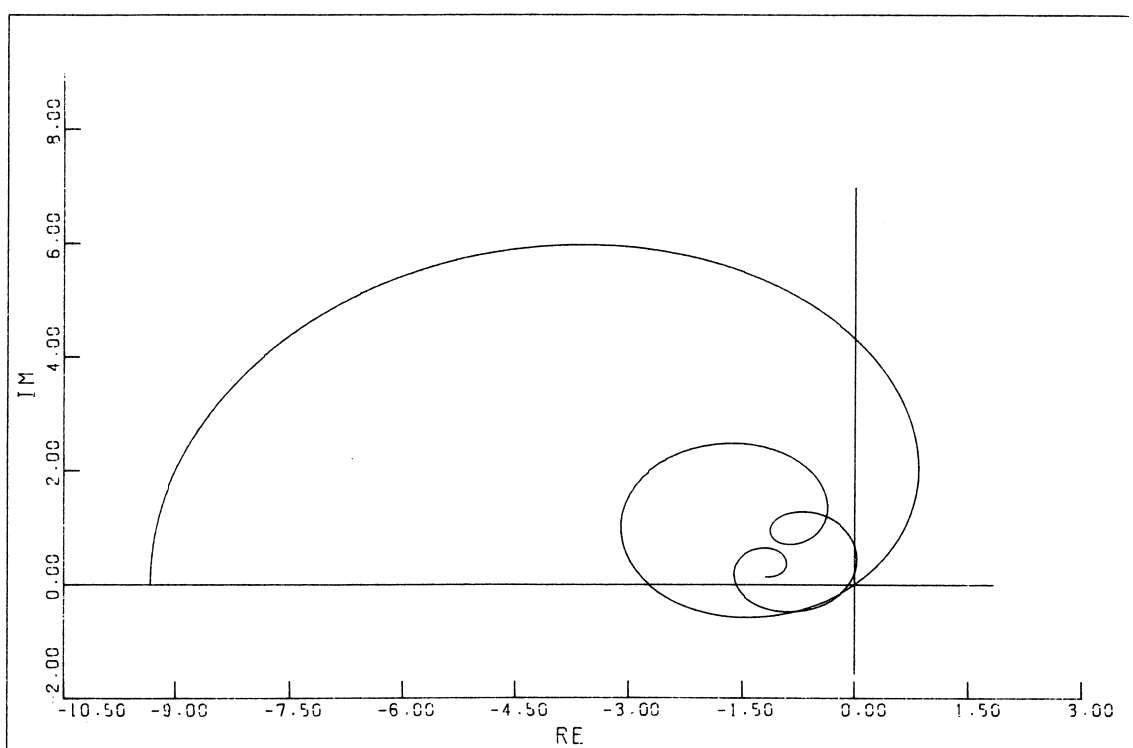


Fig. 9.2

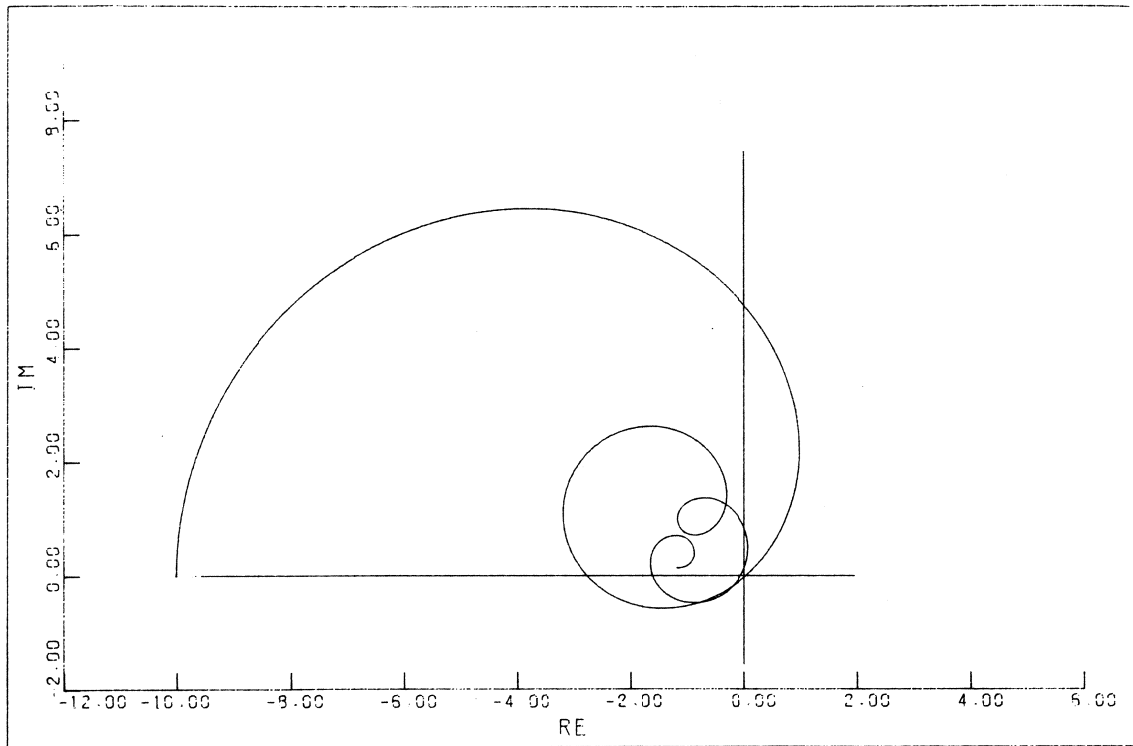


Fig. 9.3

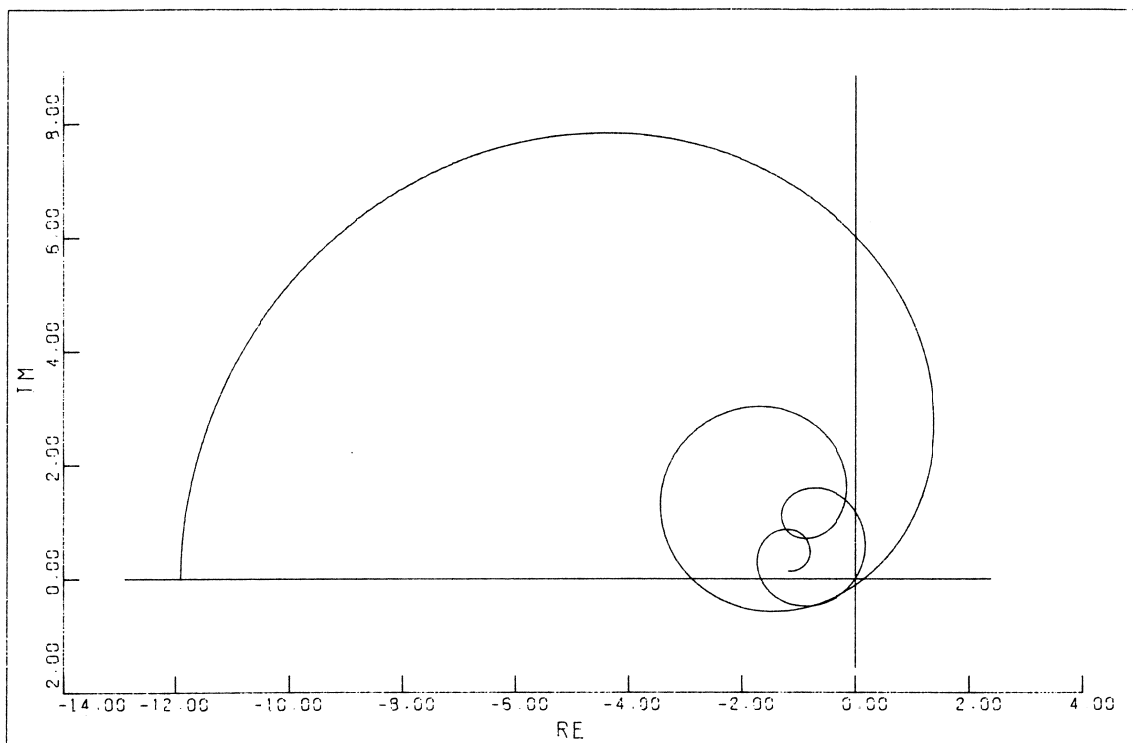


Fig. 9.4

In beide gevallen kan de curve zich niet om de oorsprong winden, immers dan wordt zowel de negatieve als de positieve y -as gesneden. Als y monotoon van $-\infty$ naar 0 gaat hebben we soortgelijke resultaten: Als $\alpha > 0$ snijdt de curve van $f(iy)$ alleen de positieve y -as. Als $\alpha < 0$ snijdt de curve van $f(iy)$ (als hij hem snijdt) alleen de negatieve y -as. Dus $\alpha > 0$, y gaat monotoon van $-\infty$ naar $+\infty$ (zie fig. 9.5). De curve $f(iy)$ begint in -1 snijdt de positieve y -as een oneven aantal maal gaat vervolgens naar α (in het rechterhalfvlak) snijdt dan de negatieve y -as een oneven aantal maal en gaat dan naar -1 . Het windingsgetal van deze curve t.a.v. de oorsprong is één. Conclusie: precies één nulpunt van $f(s)$ in het rechterhalfvlak. Dit nulpunt is derhalve reëel.

$\alpha < 0$, y gaat monotoon van $-\infty$ naar $+\infty$ (zie fig. 9.6). De curve $f(iy)$ begint in -1 snijdt de negatieve y -as een even aantal maal gaat vervolgens naar α (in het linkerhalfvlak) snijdt dan de positieve y -as een even aantal en gaat dan naar -1 . Het windingsgetal van deze curve t.a.v. de oorsprong is nul. Conclusie: geen nulpunt van $f(s)$ in het rechterhalfvlak. $\square$

Mogelijk beeld
van $f(iy)$, $\alpha > 0$

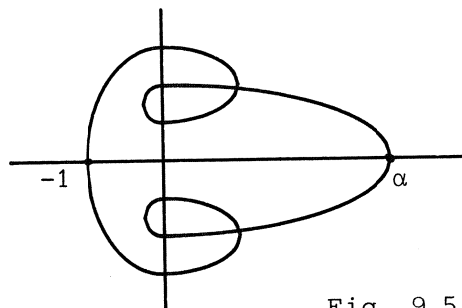


Fig. 9.5

Mogelijk beeld
van $f(iy)$, $\alpha < 0$

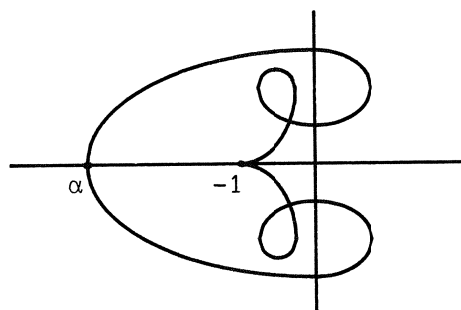


Fig. 9.6

APPENDIX A

Weerlegging van het vermoeden, $A(\tau) \in H_0 \Rightarrow h(x)$ heeft precies één nulpunt door een tegenvoorbeeld van Tom Koornwinder (zie §5).

We construeren een tegenvoorbeeld waarbij de afgeleide $F'(x)$ van $F(x)$ gedefinieerd door:

$$F(x) := \frac{\int_0^1 e^{x\tau} A(\tau) d\tau - 1}{\int_0^1 e^{x\tau} d\tau}$$

tenminste drie nulpunten heeft in het interval $(0, \infty)$. Door de definities van $F(x)$, $g(x)$ en $h(x)$ na te lopen blijkt: $x_0 > 0$ is nulpunt van $F'(x)$

$\Leftrightarrow -x_0$ is nulpunt van $h(x)$.

We hebben $F(0) = 0$ en $F(x) > 0$ voor $x > 0$

$$F(x) - 1 = \frac{\int_0^1 e^{x\tau} (A(\tau) - 1) d\tau - 1}{\int_0^1 e^{x\tau} d\tau}.$$

Definieer $B(\tau) := A(\tau) - 1$ en $G(x) := \int_0^1 e^{x\tau} B(\tau) d\tau$ dan geldt: als $G(x) - 1$ minstens vier tekenwisselingen heeft op $(0, \infty)$ dan heeft $F'(x)$ tenminste drie nulpunten in het interval $(0, \infty)$.

Neem nu voor zekere $M_2, M_3 \in (0, 1)$ en $\varepsilon \in (0, 1/8)$:

$$B(\tau) := \begin{cases} -1 & \text{op } [0, 1/8] \\ 1 & \text{op } [1/8, 1/4] \\ M_2 & \text{op } [1/4, 3/8] \\ -M_2 & \text{op } [3/8, 1/2] \\ -M_3 & \text{op } [1/2, 5/8] \\ M_3 & \text{op } [5/8, 3/4] \\ 0 & \text{op } [3/4, 1-2\varepsilon] \\ 1 & \text{op } [1-2\varepsilon, 1-\varepsilon] \\ -1 & \text{op } [1-\varepsilon, 1] \end{cases}$$

Dan geldt:

$$G(x) = x^{-1} (G_1(x) - M_2 G_2(x) + M_3 G_3(x) - G_4(x))$$

met:

$$G_1(x) := 1 - 2e^{1/8x} + e^{1/4x} = (1 - e^{1/8x})^2 > 0$$

$$G_2(x) := e^{1/4x} - 2e^{3/8x} + e^{1/2x} = e^{1/4x}(1 - e^{1/8x})^2 > 0$$

$$G_3(x) := e^{1/2x} - 2e^{5/8x} + e^{3/4x} = e^{1/2x}(1 - e^{1/8x})^2 > 0$$

$$G_4(x) := e^{(1-2\varepsilon)x} - 2e^{(1-\varepsilon)x} + e^x = e^{(1-2\varepsilon)x}(1 - e^{\varepsilon x})^2 > 0$$

$$G(0) = 0.$$

$$\exists x_1 > 0 \text{ zodat } G_1(x_1) > 2x_1$$

Kies nu M_2 en ε zo klein dat:

$$M_2 G_2(x_1) < \frac{1}{2}x_1 \text{ en } G_4(x_1) < \frac{1}{2}x_1.$$

Dan geldt $G(x_1) > 1$.

$$\exists x_2 > x_1 \text{ zodat } G_1(x_2) - M_2 G_2(x_2) < 0$$

Kies nu M_3 zo klein dat:

$$M_3 G_3(x_2) < x_2.$$

Dan geldt $G(x_2) < 1$.

$$\exists x_3 > x_2 \text{ zodat } G_1(x_3) - M_2 G_2(x_3) + M_3 G_3(x_3) > 2x_3$$

Kies nu ε zo klein dat $G_4(x_3) < x_3$.

Dan geldt $G(x_3) > 1$.

$$x_4 > x_3 \text{ zodat } G(x_4) < 1.$$

Dus $G(x)-1$ heeft minstens vier tekenwisselingen op $(0, \infty)$. $\square$

APPENDIX B

Enige functies en hun afgeleiden:

$F(\tau)$	$F'(\tau)$
$e^{-x\tau} \left[\frac{y\tau \sin(y\tau) - x\tau \cos(y\tau)}{x^2 + y^2} + \frac{(y^2 - x^2) \cos(y\tau) + 2xy \sin(y\tau)}{(x^2 + y^2)^2} \right]$	$e^{-x\tau} \tau \cos(y\tau)$
$-e^{-x\tau} \left[\frac{x\tau \sin(y\tau) + y\tau \cos(y\tau)}{x^2 + y^2} + \frac{(x^2 - y^2) \sin(y\tau) + 2xy \cos(y\tau)}{(x^2 + y^2)^2} \right]$	$e^{-x\tau} \tau \sin(y\tau)$
$e^{-x\tau} \left[\frac{y \sin(y\tau) - x \cos(y\tau)}{x^2 + y^2} \right]$	$e^{-x\tau} \cos(y\tau)$
$-e^{-x\tau} \left[\frac{y \cos(y\tau) + x \sin(y\tau)}{x^2 + y^2} \right]$	$e^{-x\tau} \sin(y\tau)$
$\frac{y\tau \sin(y\tau) + \cos(y\tau)}{y^2}$	$\tau \cos(y\tau)$
$\frac{-y\tau \cos(y\tau) + \sin(y\tau)}{y^2}$	$\tau \sin(y\tau)$
$-e^{-x\tau} \frac{\tau x + 1}{x^2}$	$\tau e^{-x\tau}$
$-e^{-x\tau} \frac{\tau^2 x^2 + 2\tau x + 2}{x^3}$	$\tau^2 e^{-x\tau}$

LITERATUUR

- [1] KERMACK, W.O. & A.G. MCKENDRICK, *A contribution to the mathematical theorie of epidemics*, Proc. Roy. Soc. Londen, ser. A115 (1927) 700-721.
- [2] KENDALL, D.G., *Deterministic and stochastic epidemics in closed populations*, Proceedings of the third Berkeley symposium on mathematical statistics and probability (J. Neyman editor) (1956) 149-165.
- [3] BAILEY, N.T.J., *The mathematical theory of epidemics*, Griffin, Londen (1957).
- [4] WALTMAN, P., *Deterministic threshold models in the theorie of epidemics*, Lecture Notes in Biomathematics, volume 1, Springer (1974).
- [5] HOPPENSTEAD, F., *Mathematical Theorie of Populations: Demographics, Genetics and Epidemics*, SIAM Regional Conference series in Applied Math. 20 (SIAM, Philadelphia), (1975).
- [6] DIEKMANN, O., *Over niet-lineaire integraalvergelijkingen en mathematische epidemiologie*, academisch proefschrift, Mathematisch Centrum, Amsterdam, (1978).
- [7] LAUWERIER, H.A., *Mathematische modellen voor epidemische processen*, Notitie uitgereikt tijdens het twaalfde Nederlands Mathematisch Congres, Amsterdam, (1976).
- [8] BONDER, L.J., *Een uitbreiding van het epidemiemodel van Kermack en Mckendrick*, scriptie, Universiteit van Amsterdam, (1978).
- [9] MARSDEN, J.E. & M. MCCRACKEN, *The Hopfbifurcation and its Applications*, Springer-Verlag, New York, (1976).
- [10] KEYFITZ, N., *Introduction to the Mathematics of Population*, Addison-Wesley Reaching, Massuchusetts, (1968).
- [11] LOPEZ, A., *Problems in Stable Population Theorie*, Office of Population Research, Princeton, N.J. (1961).

- [12] LEKKERKERKER, G.G., *Syllabus van het college Analyse II*, Universiteit van Amsterdam, (1970).
- [13] TAKAHASHI, T., *Mathematics of Automatic Control*, Holt, Rinehart and Winston, Inc. (1966).

ONTARIO : 7 APR 1991